Jean Piaget

Investigaciones sobre la abstracción reflexionante

I
La abstracción de las relaciones lógico-aritméticas

con la colaboración de I. Berthoud-Papandropoulou
J.-B. Billeter, J.-F. Bourquin, J.-L. Kaufmann
P. Mœssinger, J. Montangero, A. Moreau
A. Munari, A. Szeminska y D. Vœlin-Liambey

Título del original en francés

Recherches sur l'abstraction réfléchissante

Impreso en la Argentina
Printed in Argentina
Queda hecho el depósito
que marca la ley 11 723

Av. Belgrano 624, Buenos Aires

PRIMERA PARTE

LA ABSTRACCIÓN LÓGICO-ARITMÉTICA O ALGEBRAICA

En 1950 el autor de estas líneas insistía ya (*) en la necesidad de distinguir de la abstracción referida a los objetos, una "abstracción reflexionante" que parte de acciones u operaciones del sujeto y transfiere a un plano superior lo que se ha extraído de un nivel inferior de actividad: diferenciaciones, por tanto, que necesariamente involucran el punto de llegada de composiciones nuevas y generalizadoras. Pero, si bien estas hipótesis nos parecieron obvias, en el curso de muchas investigaciones efectuadas en nuestro Centro de Epistemología Genética nunca nos dedicamos, en un estudio de conjunto, a los problemas de las abstracción ni a las relaciones entre las dos formas distinguidas de ese modo. La presente obra está destinada a cubrir esa laguna.

Llamaremos "abstracción empírica" a la que se refiere a los objetos físicos o a los aspectos materiales de la acción propia, tales como los movimientos, los impulsos, etcétera. Notamos enseguida que, aun en sus formas más elementales, este tipo de abstracción no podría consistir en meras "lecturas", pues, para abstraer de un objeto cualquier propiedad, como su peso o su color, es necesario utilizar instrumentos de asimilación (establecimiento de relaciones, significaciones, etc.) que dependen de "esquemas" senso-motores o conceptuales que no son proporcionados por el objeto, sino construidos con anterioridad por el sujeto. Sólo que, por necesarios que sean tales esquemas, con el carácter de instrumentos, para la abstracción empírica, ésta no se refiere a ellos y sólo procura alcanzar el dato que permanece exterior a él: apunta, pues, a un contenido al que esos esquemas se limitan a enmarcar de modo que sea posible captarlo.

Por el contrario, la "abstracción reflexionante", se refiere a esas formas y a todas las actividades cognitivas del sujeto (esquemas o coordinación de acciones, operaciones, estructuras, etc.) para extraer de ellos ciertos caracteres y utilizarlos con otros fines (nuevas adaptaciones, nuevos problemas, etc.). Es pues, "reflexionante" en dos sentidos complementarios, que designaremos

(*) J. Piaget, *Introduction a l'épistemologie génétique*, P.U.F. (1950), t. I. págs 72 y 73.

del siguiente modo. En primer lugar, traspone a un plano superior lo que toma del nivel precedente (por ejemplo, al conceptualizar una acción): designaremos esa transferencia o esa proyección con el término "reflejamiento". En segundo lugar, debe entonces necesariamente reconstruir en el nuevo plano B lo que ha extraído del plano de partida A, o relacionar los elementos extraídos de A con los que ya estaban situados en B: llamaremos "reflexión" a esta reorganización determinada por el reflejamiento.

La abstracción reflexionante —con sus dos componentes, "reflejamiento" y "reflexión"— puede ser observada en todos los estadios: desde los niveles senso-motores (lo veremos en el capítulo XVIII) el lactante, para resolver un problema nuevo, es capaz de extraer de estructuras ya construidas ciertas coordinaciones y reorganizarlas en función de nuevos datos. Nada sabemos en estos casos de que el sujeto tome conciencia. Por el contrario, en los niveles superiores, cuando la reflexión es obra de pensamiento, hay que distinguir todavía entre el proceso en tanto construcción y su tematización retroactiva, que se convierte entonces en una reflexión acerca de la reflexión: en este caso hablaremos de "abstracción reflexionada" o de pensamiento reflexivo.

Conviene agregar una última distinción. En niveles que ya son representativos pero aún preoperatorios, al igual que en el nivel de las operaciones concretas, sucede que el sujeto no puede efectuar construcciones, que más tarde se volverán puramente deductivas, a no ser que se apoye constantemente en los resultados comprobables de esa construcción (cf. el uso del ábaco para las primeras operaciones numéricas). En ese caso hablaremos de "abstracciones pseudoempíricas", ya que si bien la lectura de esos resultados se hace sobre objetos materiales, como si se tratara de abstracciones empíricas, en realidad las propiedades comprobadas son introducidas en ellos por la actividad del sujeto. Nos encontramos en presencia de una variedad de abstracción reflexionante, pero con la ayuda de elementos observables a la vez exteriores y construidos gracias a ella. Por el contrario, las propiedades a las que se refiere la abstracción empírica existen en los objetos antes de cualquier comprobación por parte del sujeto.

Los dos problemas que trataremos en esta obra son, pues, los mecanismos de la abstracción reflexionante y sus relaciones complejas, —ya que en modo alguno son simétricas— con la abstracción empírica. En efecto: mientras que la primera se vuelve cada vez más autónoma (es la única que opera en lógica y en matemáticas puras), la segunda sólo progresa si se apoya en la primera.

En esta primera parte, los capítulos I a IV se referirán a las construcciones aritméticas elementales, y los capítulos V a VII a las estructuras lógicas. La parte II estará dedicada exclusivamente a las relaciones de orden, y en la parte III, concerniente a las construcciones espaciales, se plantearán en mayor medida que las dos primeras, los problemas vinculados con las relaciones entre las dos formas de abstracción.

N.B. — Aunque nuestros trabajos no conllevan intención pedagógica alguna, no podemos menos que destacar el hecho de que el conocimiento de las reacciones de escolares descritas en esta obra podría ser de alguna utilidad para los educadores (pensamos en particular en las sorprendentes dificultades que el niño halla para comprender la significación de las multiplicaciones ultrasimples del cap. II).

Agradecimientos. — Las investigaciones publicadas en esta obra fueron subvencionadas por el Fondo Nacional Suizo para la Investigación Científica, por la Fundación Ford de Nueva York y por la Foundation's Fund for Research in Psychiatry de New Haven. Les expresamos todo nuestro reconocimiento.

CAPÍTULO PRIMERO

Abstracciones, diferenciaciones e integraciones en la utilización de operaciones aritméticas elementales

EN COLABORACION CON A. SZEMINSKA

Se dispone de dos conjuntos de bloques, unos rojos (*r*) y los otros azules (*a*) que pueden ser de igual longitud (y, en general, en este caso son cubos) o bien se hallan en una relación que va desde 1 a 2 hasta 1 a 5. Se trata, después de algunas cuestiones preliminares referentes a correspondencias, de prever, dada una pared *A* formada, por ejemplo, por 10 bloques azules de valor 5, hasta dónde llegará una pared *R* formada por 10 bloques Rojos de valor 1. Una vez hecho esto, se agregan, por ejemplo, 10 bloques azules cuyo valor es también 5, y 10 rojos de valor 1, y se pregunta hasta dónde llegarán las paredes. Pero también se pueden agregar 10 azules y 10 rojos, todos ellos de valor 1. Se puede, por fin, presentar dos paredes desiguales formadas, por ejemplo, la *A* por 10 grandes bloques azules, y la *R* por 10 pequeños bloques rojos; se le pide al niño que los iguale tomando sólo bloques grandes para añadirlos a la pared roja *R*, y cada vez que el niño lo hace el experimentador ubica un bloque azul pequeño como prolongación de la pared *A*. Estas cuestiones parecen muy sencillas, y sin embargo plantean problemas de diferenciación y de integración con generalizaciones, cuyas soluciones se escalonan entre los 4 y los 5 y los 11 y los 12 años, y que resulta útil analizar desde el punto de vista de las abstracciones en juego.

La técnica implica 8 problemas. *La prueba núm. 1* consiste simplemente en tomar, de a uno, bloques de la serie de los azules y ponerlos frente al bloque rojo que el niño extrae de la serie de los *r* (las dimensiones de los *a* y de los *r* siguen siendo las mismas): se pregunta si las cantidades son las mismas y cómo se lo puede saber. Si el sujeto no se refiere a una extracción simultánea, se pasa a una biyección más concreta todavía poniendo cada bloque azul sobre cada uno de los rojos y vuelven a formularse las preguntas,

Problema 2. Una vez reconocida la igualdad de los dos conjuntos (todos los sujetos la reconocen, pero la justifican de modo diverso), se anuncia que se van a hacer dos "paredes" (*A* y *R*, por simples alineamientos horizontales paralelos) y se pregunta "¿cómo serán?", y si el sujeto no se refiere a la longitud, se precisa: "¿serán del mismo largo?" "¿Los mismos bloques tú (rojos) y yo?"

Problema 3. Se retoman los problemas 1 y 2, pero con continuación indefinida: "Si continuamos así, tomando uno tú y uno yo, y si comenzamos al mismo tiempo y terminamos al mismo tiempo, ¿cómo serán las paredes con todos los ladrillos (sin enumerar los que quedan de reserva)? ¿Y la misma cantidad de bloques tú y yo?"

Problema 4. Se muestran en primer lugar dos bloques desiguales (en general $a = 5$ y $r = 1$) y se pregunta "¿cómo son?". Si la respuesta es demasiado global, se insiste: "Compara a ambos"; y después: "Puedes medirlos". En caso de que el niño no acierte, se colocan los rojos sobre el azul, descontándose la respuesta: "Hay 5", etcétera. Después el experimentador toma (por extracciones simultáneas) un mismo número de bloques azules grandes y de bloques rojos pequeños, construye una pared con los azules y le pregunta al niño donde terminará exactamente la pared roja. Se puede pasar a las relaciones de 4 a 1, etcétera, y variar el número de bloques. Se deja naturalmente como muestra la pareja modelo $a > r$.

Problema 5. Dejando las mismas muestras. se plantea el mismo problema, pero sin indicar los números: se traza una simple línea azul para representar la pared *A* y se pide al niño que trace una recta roja para indicar la longitud de *R*. Como esta pregunta en lo abstracto es mucho más difícil, se puede fijar un número (25 a 150 según la edad) o llevar la relación a/r a 2 contra 1.

Problema 6. Conservando siempre la pareja que sirve de muestra, se le agregan a las dos "paredes" del problema 4 un mismo número de bloques azules y de bloques rojos, y en la misma relación (5 a 1, etc.). Dicho de otro modo, la longitud de las paredes aumenta, su diferencia absoluta (lo que excede) también, pero la relación (cociente) se conserva: el niño debe prever hasta dónde llegará la pared roja (recurriendo a la pareja que sirve como muestra) después que el experimentador haya puesto los bloques azules.

Problema 7. Se parte de nuevo de las paredes desiguales de la prueba 4, pero esta vez se agregan, en cantidades iguales, bloques del mismo valor (en general de 1). En este caso, el excedente conserva su valor a pesar del alargamiento de las paredes, pero la relación $1/n$ ya no se mantiene, puesto que es de *n* a *1* para la primera parte de las paredes y de 1 a 1 para los agregados.

Problema 8. Se presentan dos paredes; por ejemplo, una de 10 bloques azules de valor 5 y otra de 10 rojos de valor 1. Se pide al sujeto que los iguale poniendo él mismo, uno por uno, la cantidad de bloques rojos que quiera, pero grandes (= 5), mientras que el experimentador agrega, en cada oportunidad, a su pared un bloque azul, pero

pequeño (= 1). Es, pues, un simple problema de compensación, cuya solución en este caso es *10a5* + *10a1* = *10r1* + *10r5*.

El orden de los problemas a veces varía levemente: se puede plantear el problema 5 antes de la prueba 4 para volver a ella a continuación y comparar las soluciones en lo abstracto y lo concreto. Del mismo modo, se puede volver al problema 4 (resuelto más rápidamente) a propósito de las pruebas 6 y 7 cuando el fracaso es total.

§ 1 | EL NIVEL IA. — Los sujetos de este nivel elemental fracasan en los problemas 3 y 4. En cuanto a los dos primeros, estudiados con mucha frecuencia en las investigaciones anteriores, dan lugar, desde el punto de vista de la abstracción, a las siguientes observaciones. Por una parte, más de la mitad de los sujetos consideran que los dos conjuntos son iguales, basándose, no en la coordinación de las acciones que aseguran la correspondencia (y ello contrariamente a lo que ocurre cuando es el niño mismo quien coloca con una mano un elemento en una de las series y, simultáneamente, con la otra el elemento correspondiente en la segunda), sino en el espacio ocupado por las dos hileras, cuyas unidades pueden estar separadas o unidas siempre que se verifique una igualdad visual en las longitudes totales. Este hecho confirma la regla según la cual la abstracción se refiere primeramente al resultado de las acciones y después se centra en éstas. Pero sobre todo pone de manifiesto una vez más la inicial indiferenciación del número de los elementos y de la longitud de la hilera que forman, lo que explicará las reacciones ante el problema 4. Por otra parte, cuando se pasa a la biyección material, poniendo cada vez un cubo rojo sobre un bloque azul, el sujeto justifica la equivalencia diciendo: "porque se tomó lo mismo" y suele precisar entonces que sucede lo mismo en el caso de la extracción simultánea:

STE (5;2) evalúa en primer lugar la igualdad en función de la longitud de las hileras, pero después de la superposición por parejas de cubos rojos y azules, dice, cuando recuerda las extracciones simultáneas: "*Usted tiene mucho y yo mucho, lo mismo: para poner los rojos sobre los azules hay justo lo suficiente.*"

La indiferenciación del número (o de la cantidad) de elementos y de la longitud de las hileras produce como consecuencia inmediata, una respuesta aparentemente acertada al problema 2. Todos los sujetos del nivel IA dicen, en efecto, lo mismo que uno de ellos: "Son los mismos bloques, entonces se hacen las mismas paredes"; pero la reacción sólo es correcta en apariencia, porque (se lo ve en el problema 4) no tienen en cuenta la longitud de las unidades, y no precisan, como en el nivel IIA, "porque es el mismo número de bloques y todos son de la misma longitud". La respuesta sólo es correcta en función de una indiferenciación, y en modo alguno lo es en función de una coordinación (o integración después de la diferenciación).

En cuanto al problema 3, los resultados obtenidos son interesantes:

DID (4;10) *Problema 1: "Exactamente lo mismo". Problema 2: "El mismo fin, se tomaron los mismos.* — ¿Y si continuamos (problema 3)? —...— (Se rehace). ¿Si continuamos todo el día? — *Puede ser como el otro: no se puede saber, es todo un día.* — ¿Pero si se piensa? — *Eso cambia: Al final no se sabe cómo serán las paredes.* — ¿Pero lo mismo o no? — *No se sabe. Hay que ver".*

GEO (5;1). *Problema 2: "Las paredes serán las mismas, porque los bloques son los mismos... Hay que ver. No se puede saber ahora* (antes de la construcción)". Después de la comprobación: "¿Y si se continúa? — *Eso parecerá mucho para usted y para mí mucho, mucho.* — ¿Pero otro tanto? — *No se sabe. Usted podrá saberlo cuando los cuente.*"

En realidad, si bien a partir del nivel IB los sujetos afirman que continuando indefinidamente la extracción simultánea se obtendrá siempre una igualdad numérica así como una igualdad en la longitud de las paredes, diez sujetos del nivel IA (cuya edad media es 5;3) no están seguros, y declaran que no pueden determinarlo. Desde el punto de vista que aquí nos interesa, hallamos en ello una prueba de que la abstracción reflexionante de la biyección se mantiene incompleta y solo funciona si se apoya en una necesaria abstracción pseudoempírica; dicho de otro modo, en una comprobación de los resultados observables.

Todo lo precedente hace que sea natural el fracaso ante el problema 4, que se refiere a la comparación de las longitudes de las dos paredes formadas por el mismo número de bloques, pero de longitudes desiguales. Se comienza por presentar un bloque cúbico (longitud 1) y otro de valor 5, a partir de lo cual se produce la comparación espontánea: "uno es más grande", "el azul es grande y el rojo es cuadrado" o "el azul es alargado y el rojo es cuadrado"; esto es —desde el punto de vista de la abstracción—. una indiferenciación entre el tamaño y la forma, lo cual es esencial y explica el carácter cualitativo y la ausencia de cuantificación (salvo la ordinal, que es aún cualitativa) propios de las reacciones de este nivel. Se le pide a continuación que construya dos paredes (y se comienza esa construcción), una formada por bloques de longitud 1 y la otra de bloques de mayor longitud. Los sujetos del nivel IA prevén en este caso la igualdad de las longitudes totales:

PER (4;11): "*Las paredes llegarán (las dos) hasta el final: hay mucho aquí y mucho allá*".

CRI (5;10): "*La misma longitud, porque se las hizo al mismo tiempo (gestos de correspondencia)*".

DUC (6;3): Lo mismo, porque "*se toman los mismos, se tiene la misma cantidad de ladrillos*".

PLE (6;3): "*La misma longitud porque se comienza y se termina al mismo tiempo*".

Todos estos individuos se asombran visiblemente cuando comprueban que la pared azul es bastante más larga que la otra, y su reacción inmediata es entonces dudar de que en realidad el número de elementos sea el mismo: o bien lo dicen explícitamente, como Per al afirmar: "entonces usted tomó más", o bien se ponen a contar los bloques dejando de confiar en la correspondencia 1 a 1 observada en el curso de la construcción.

En cuanto a las pruebas 6 a 8, es evidente que en esas condiciones el fracaso es total:

CAT (4;11) no comprende nada de la prueba 6 y dice, a propósito de la 7: "*No se puede saber*"; y después: "*la pared azul será del mismo largo que la roja porque se toman pequeños*".

DAR (5;2), en presencia de paredes desiguales construidas (y acabadas) a propósito del problema 4, piensa (en relación con el problema 7) que "eso hará más pequeña a esta pared (a la que sobresale)", por lo tanto, "*serán del mismo largo* (en total): *se le agregan los mismos*".

GRA (6;2), en presencia de la paredes azul > roja, dice, en el problema 6: "*Eso hará al suyo más largo, y al mío también*", indicando una misma longitud para ambos.

En el caso del problema 8, no hay ninguna comprensión de la compensación:

JUL (6;2), después de haber comprobado las desigualdades azul > rojo en ocasión de los problemas precedentes: "*Hará sobrepasar siempre la pared con los grandes*"

BAL (6;4): "*No es posible obtener la misma longitud si usted toma de los pequeños y yo de los grandes*".

En una palabra, la característica de este primer nivel es el poco poder de abstracción; de ahí la presencia y la persistencia de algunas indiferenciaciones fundamentales, tales como el tamaño de los objetos y su forma, o (lo que es muy similar) entre un número de elementos y la longitud de la hilera que forman. La coodinación tan primitiva de acciones que constituye la biyección (y cuyas raíces parten de los niveles senso-motores) da lugar a una abstracción reflexionante tan débil que la conciencia que se alcanza del resultado de esas acciones prevalece sobre la del proceso como tal, y el problema 3 da lugar a un fracaso por la necesidad de apoyar el reflejamiento en una abstracción pseudo-empírica.

§ 2 | EL NIVEL IB. — Alrededor de los 6 años como promedio, la prueba 1 da lugar a una abstracción reflexionante a partir de acciones de biyección: hay igualdad de cantidades porque "se lo ha tomado así", "se ha tomado al mismo tiempo", etcétera. De ahí resulta que el problema 3 da lugar a un éxito (si se continúa indefinidamente la igualdad se conservará [*]) sin que se requieran comprobaciones pseudo-empíricas; la generalización procede así de la abstracción.

EDO (5;9) "¿Y si continuamos todo el día? — *Si a su turno cada uno toma lo mismo y no se equivoca, andará parejo, tanto en un extremo como en el otro*".

(*) Recordamos un buen ejemplo recogido hace tiempo por uno de nosotros con B. Inhelder, aunque en una situación en la que el propio sujeto construye la correspondencia 1 a 1 valiéndose de ambas manos, pero para poner en cada caso una perla en un recipiente transparente y otra en un frasco tapado por una pantalla: "Cuando se lo sabe hacer una vez —dijo entonces un chico de 5 años y 1/2— se lo sabe hacer siempre".

DUC (6;3) la misma pregunta: *"El mismo largo: se hace lo mismo todo el tiempo* (gesto rítmico)".

A propósito de los problemas 2 y 4 se comprueba otra diferenciación, aunque apenas incipiente: la de la cantidad y de la longitud, que merece un examen atento desde el punto de vista de los primeros esbozos de cuantificación a partir de las diferencias cualitativas.

Notamos en primer lugar el progreso alcanzado en la medida de las unidades (por ejemplo, un rojo = 1 y un azul = 5): se pueden poner, dicen los sujetos de 6 años, "5 rojos sobre uno azul" o "entran 5 pequeños en uno grande". Se recurre pues a la extensión que sucede a la única cualificación en comprensión ("grande" o "alargado" y "cuadrado", etc.), pero sin que el empleo del número 5 conduzca a una auténtica medida, es decir, a una métrica basada en la aditividad de las unidades. Es lo que muestran los hechos siguientes:

MOL (6;0) ante el problema 2 responde naturalmente que las paredes serán de la misma longitud. Se le muestra entonces un bloque azul = 3 para que lo compare con uno rojo = 1, y se anuncia que las paredes por construir (prueba núm. 4) comprenderán 6 bloques de cada uno. Responde primero que *"no se puede saber"* dónde terminarán, y después: *"Serán de la misma longitud"*. Poco después: *"Será más largo el azul"*, pero pone el indicador frente al último bloque azul como previsión de la longitud de la pared roja (por lo tanto, de nuevo igualdad); después, cuando llega a la mitad, se asombra mucho por la diferencia, y pone el indicador frente al penúltimo bloque azul, y por lo tanto, de nuevo mucho más lejos. En el caso de $n = 8$ y una proporción de 2 a 1: las mismas reacciones.

CRA (6;2), antes de construir las paredes, con bloques diferentes de 5 a 1, mira detenidamente los bloques que sirven de modelo y dice de pronto: *"el suyo será más largo"*. Pero ubica el indicador en el penúltimo bloque azul (sobre 10, aproximadamente a 45 cm.); después, examinando una vez más los bloques rojos, lo pone en el octavo bloque azul. A continuación se muestra muy sorprendido porque una vez más los rojos no alcanzan hasta allí: *"Es porque sólo tengo dos pequeños-pequeños"*. No se produce ninguna generalización en los ensayos siguientes.

Vemos que el progreso de estas reacciones, en relación con las del nivel IA, sólo consiste en prever una pequeña desigualdad de longitud entre las paredes, pero mínima, y aun no siempre de modo inmediato (Mol). Hay todavía no una cuantificación (métrica), sino una evaluación ordinal basada en las diferencias cualitativas. Cuando se plantea el problema 5 (el mismo problema, pero sin precisar el número de elementos) antes que el 4 (indicando la cantidad de bloques de cada categoría que ha de colocarse), limitándose a trazar una línea para indicar la longitud de la pared azul y pidiendo que se dibuje una línea roja paralela para simbolizar la pared de ese color, las respuestas son del mismo tipo, pero con diferencias todavía más reducidas.

Respecto de los problemas 6 y 7, hasta los sujetos más evolucionados de este nivel sólo llegan a prever el alargamiento de las dos paredes, sin coordinación de las relaciones, pero a veces con la idea de que los pequeños bloques rojos tienden a alcanzar a los grandes bloques azules (aunque se dé el mismo número):

ESC (7;4). *Problema 6: "Si se agregan los azules, sobrepasa... cuando agregue también los rojos estará todavía más aquí* (la pared roja)". *Problema 7: "Es el rojo el que se alarga. Usted agrega grandes, la mía lo sobrepasará a pesar de todo, yo tomo muchos pequeños".*— Pero mira lo que hicimos antes.—*Eso no cuenta; cuenta lo que aquí permite alargar, y son los míos pequeños".* Se hace el ensayo: *"No, a pesar de todo el suyo es el más largo, no pude alcanzarlo".*

SEL (7;1) *Problema 6: "El rebasamiento será el mismo",* dice refiriéndose solamente al número de bloques agregados, mientras que, paradójicamente, ante el problema 7 dice: *"Se agregan los mismos";* por lo tanto, *"el rebasamiento se reduce porque usted sólo agrega pequeños* (mientras que usted tenía sólo grandes)".

Ahora bien: a pesar de ciertas tendencias compensadoras (como en Esc), la prueba 8 no sale bien por no haber considerado las relaciones, y porque el sujeto sólo se preocupaba por alcanzar el extremo de la pared más larga agregando a la segunda lo que le falta.

REN (5;10) agrega 5 bloques pequeños para alcanzar el extremo, y se asombra al comprobar en el resultado final que las longitudes son desiguales.

BAC (7;0) a pesar de su edad responde como Bal en el nivel IA: *"No se puede lograr lo mismo cuando usted toma pequeños y yo grandes".*

Por lo tanto, en el caso de estas pruebas no hay más cuantificaciones métricas que en las precedentes, puesto que los razonamientos se limitan a utilizar las diferencias cualitativas.

§ 3 | EL NIVEL IIA — Alrededor de los 7-8 años se encuentra por regla general un nivel caracterizado por los comienzos de la cuantificación, y, en el presente caso, (*) se manifiestan por el éxito frente al problema 4, pero todavía de naturaleza aditiva, por la utilización repetida de la diferencia dada (entre un bloque rojo de valor 1 y uno azul cuyo valor oscila entre 2 y 5): esta diferencia, ya notada por el sujeto en el nivel IB, pero a título de abstracción pseudoempírica local o aislada, se adiciona, pues, a sí misma cierto número de veces (tantas como elementos hay en la pared), lo que conduce a una cuantificación a partir de la diferencia inicial. Por el contrario, los problemas 5 a 8 sólo dan lugar todávía a fracasos por falta de coordinaciones suficientes, es decir en el tipo de reflexión sobre las reflexiones.

Veamos, en primer término, un caso intermedio entre los niveles IB y IIA:

LOR (7;4) dice de pronto: *"el número es el mismo, pero la longitud alarga los azules";* después tiene escrúpulos: *"Soy un tonto: la cantidad es la misma; por lo tanto, es la misma longitud. A pesar de que* (los rojos) *son pequeños, es la cantidad lo que hace iguales a las paredes".* Pero una vez construida la pared azul (10 unidades que valen 5

(*) Es inútil volver a los problemas 1 a 3, ya resueltos en el nivel IB. Notemos solamente que los sujetos del nivel II A justifican su respuesta al problema 3 invocando la biyección o correspondencia 1 a 1 que confiere necesidad lógica a la conservación indefinida de la igualdad de los dos conjuntos aún por construir.

cada una), Lor, al pedírsele que indique hasta dónde llegará la pared roja, dice de nuevo *"El azul será más largo"*. Entonces pone el indicador al final de la azul; después, mirando cada vez los dos elementos, el azul (5) y el rojo (1), dados para comparación, desplaza poco a poco el indicador deteniéndose un instante en la mitad; después retrocede cerca del tercero, lo cual es casi lo justo; a continuación toca cada bloque azul y acerca el indicador al segundo, con lo que ha sumado 10 veces la diferencia (*) $a - r$, trasladando visualmente a cada bloque azul la relación dada en los dos bloques que sirven de modelo. Pero no generaliza su descubrimiento a propósito de los ensayos siguientes.

A partir de estos casos intermedios vemos que la relación dada $a > r$, y por tanto la diferencia $a - r$, en lugar de ser simplemente trasladada tal cual a la extremidad de la pared azul, —de donde $A - R = a - r$, como en el nivel IB— es comprendida (al menos momentáneamente) como repitiéndose de modo idéntico para cada pareja a y r, de donde $A - R = (a - r) + (a - r) + (a - r)$, etc. $= N(a - r)$, pero el sujeto permanece en esa repetición aditiva sin extraer la relación general, que es multiplicativa.

Veamos ahora casos que claramente corresponden al nivel IIA, uniendo a ellos las respuestas al problema 5, planteado antes o después del 4, o bien indicando de antemano el número n de elementos de las paredes, pero sin construir la azul y pidiendo sólo el trazado de dos líneas:

JAC (8;8), para N = 10 y $a = 5r$: *"La pared azul será más larga"*. Pero no se construye la pared azul, y simplemente se dibuja una raya: Jac traza entonces una raya roja más corta, pero en muy poco; por tanto $A - R = a - r$. Cuando se construye la pared azul con los bloques, Jac establece una correspondencia visual (sin tocar nada) entre cada bloque azul y la diferencia $a - r$ percibida en los bloques que sirven de modelo: entonces pone el indicador a la altura de la mitad del segundo bloque azul, lo que constituye una aproximación válida. A continuación, para $N = 9$ y $a - 3r$, dibujando simplemente las líneas, recae en $A - R = a - r$ (relación de aproximadamente 45 a 40), pero cuando se construye la pared azul con los bloques, cuenta hasta 9 haciendo corresponder cada bloque a con la diferencia que sirve de muestra ($a - r$) y pone de nuevo el indicador a la altura de la mitad del segundo bloque azul diciendo: ***Dos grandes*** (6) ***y también la mitad del grande*** (3) ***hacen 9 cubos pequeños***", lo cual es correcto, pero está mal aplicado, porque indicó una longitud de 4 1/2. Para $N = 10$ y $a = 2r$ mide a con r y dice espontáneamente *"la mitad"*. Ahora bien, —hecho extraordinario— cuando se limita a dibujar las líneas, da de nuevo $A - R = a - r$, es decir, aproximadamente una relación de 20 a 18-19. Pero cuando se construyen las paredes con los bloques, cuenta *"dos y dos y dos y dos y dos"*, y pone el indicador a la altura del quinto bloque azul lo cual es correcto, al ser $A - R = 5(a - r)$, pero cuando se retoma el dibujo de las líneas, ¡vuelve a caer en la estimación: $A - R = a - r$!

MAG (8;5). *Problema 5.* (para $a = 5r$): prevé paredes de la misma longitud porque tienen el mismo número de elementos, pero con los bloques (problema 4: $N = 10$),

(*) De aquí en adelante designaremos mediante a y r cada bloque azul y cada bloque rojo, y mediante A y R a sus respectivas sumas. Además emplearemos el símbolo n para expresar la relación entre un a y los r; por lo tanto, $a = nr$, donde n puede valer de 1 a 5 según el rojo sea igual al azul o éste valga por 2, 3, 4 ó 5 rojos. Por último, utilizaremos el símbolo N para designar la cantidad de elementos colocados para formar las paredes: $N = 10$ significa $A = 10a$ y $R = 10r$.

Por otra parte, la notación $A - R = a - r$ indica que, para el sujeto, la diferencia entre las dos paredes, R y A, únicamente vale una diferencia $a - r$, y aun no su suma.

pone primero el indicador al final de A; se corrige enseguida contando hasta 5 sobre el primer bloque azul y también 5 sobre el segundo, y ubica el término de los rojos de modo correcto *"porque* (un *a*) *tiene la longitud de los cinco cuadrados* (*r*)". Para $N = 9$ y $a = 3r$, rechaza toda decisión sobre las líneas dibujadas, pero con los bloques cuenta: *tres* y *tres* y *tres*" y se decide acertadamente. Aún en el caso de $N = 12$ y $a = 2r$, rechaza el dibujo — *"hay que construir la* (pared) *azul para saberlo"*—, pero con los bloques acierta inmediatamente: *"Se tienen doce y doce* (elementos), *y dos rojos por uno azul; es entonces porque seis y seis hacen doce"*. Para $N = 3$ pone el indicador sobre el primero y después sobre el segundo *a*.

De modo general, ya sea que el sujeto proceda por correspondencias visuales entre cada elemento azul y la diferencia $a - r$ que sirve como modelo, toque cada bloque y cuente el número de bloques rojos que le corresponden, o, aun, cuente (2 y 2 y 2, etc., o 3 y 3 y 3, etc.), la solución se obtiene mediante un proceso aditivo que se remonta a $A - R = (a - r) + (a - r) + \ldots$ Ahora bien; hay un progreso considerable en relación con el nivel IB, aunque se proceda por abstracción reflexionante a partir de la abstracción de la diferencia de longitud $r - a$ para dos unidades numéricas (*1a* y *1r*) que caracterizaba el nivel precedente. En efecto: lo nuevo es el hallazgo de la misma diferencia o de la misma relación para cada pareja *a* y *r*, lo que implica la abstracción de una equivalencia, y, por lo tanto, de una especie de correlato: *r2* es a *a2* como *r1* es a *a1* = etc. (véase el capítulo III, donde los correlatos comienzan también en este nivel IIA). En ese caso, el hecho de reconocer la existencia de varias relaciones equivalentes lleva a reunirlas en extensión, y esa adición de las diferencias constituye una cuantificación.

Pero es muy notable comprobar que si N no es conocido, y, por tanto, si se procede en abstracto, sin los bloques (salvo los dos que sirven de muestra $a > r$), el sujeto vuelve a las soluciones del estadio I, es decir, $A - R =$ una sola diferencia $(a - r)$, o también $A = R$ porque los N son los mismos (Mag). Ocurre que para resolver el problema 5 hay que emplear una forma superior de abstracción: una abstracción reflexionada o reflexiva que procede por reflexión sobre las reflexiones particulares. En realidad, es como si volviera a reunir las adiciones en una adición de las adiciones, es decir en una multiplicación $A - R = N(a - r)$, o incluso en una proporción $A/R = a/r$, todo lo cual sobrepasa al nivel IIA.

Respecto de los problemas 6 y 7, cuya solución implica (en 6) la permanencia de la misma relación, o (en 7) la conservación de la diferencia absoluta, el progreso respecto del nivel IB radica en que los sujetos admiten inmediatamente que la prolongación de las dos paredes están coordinadas, pero fracasan al precisar cómo. En el caso del problema 7, prevén un cambio de la diferencia absoluta. En cuanto al problema 6, no llegan a comprender que el correlato (*r2* es a *a2* como *r1* es a *a1*, etc.), ya alcanzado a propósito del problema 4, debe conservarse y prolongarse durante el agregado de nuevos elementos *a* y *r*; olvidan la relación de *a* con *r*, sin duda porque se trata ahora de dos conjuntos de diferencias (aunque equivalentes), y porque ello supondría el paso de simples correlatos (cuya "comprensión" cualitativa es inmediata) a proporciones propiamente dichas: *R2* es a *A2* como *R1* a *A1*:

ROL (8;11), $N = 10$, $a = 5r$, a lo cual en seguida se agrega *6a y 6r*: dice que *"su*

pared se va a alargar y la mía también'', pero prevé un mayor alargamiento para los rojos. Para simplificar se quitan progresivamente cantidades iguales de azules y de rojos: entonces, modifica cada vez la relación. En el problema 7 comprende que los agregados son iguales (6 azules pequeños y 6 rojos pequeños), pero cree que lo que sobrepase ''*será menor que eso* (= lo de antes)''.

FAB (8;8) en el caso de una relación $a = 3r$, soluciona inmediatamente el problema 4, pero lo olvida en el problema 6 y termina con una pared roja mucho más larga. En el problema 7 lo que sobrepase será ''*más grande* (que antes); *no más pequeño, porque antes usted tenía ladrillos más grandes y yo más pequeños*''.

Como se ve, aunque el descubrimiento de los correlatos durante el problema 4 había permitido una adición general de las diferencias, basta con agregar otras nuevas (aunque idénticas en sus valores elementales $a - r$) para perturbar el sistema. Ocurre sin duda porque a los primeros conjuntos $A1$ y $R1$ se agregan otros nuevos, $A2$ y $R2$, que exigirían una abstracción reflexionante (o al menos pseudoempírica) análoga, con una posterior reflexión sobre las reflexiones (por lo tanto, una abstracción a la segunda potencia) que se traduciría numéricamente en las proporciones $R2/A2 = R1/A1$ o $(R1 + R2)R1 = (A1 + A2)/A1$; ahora bien: las proporciones, en la medida en que son abstracciones a la segunda potencia, sólo aparecen en los niveles posteriores.

En lo que concierne a las simples compensaciones del problema 8, podrían parecer más fáciles, pero involucran comparaciones reflexivas análogas, por lo que se produce un nuevo fracaso:

Pal (8;8) añade por tanteos los bloques considerados necesarios para la igualación, pero concluye: ''*No se puede: o sobrepasa el mío o el suyo.*''

CAL (8;6) tampoco llega a la misma cantidad N con tamaños inversos de los bloques ya puestos. Se detiene en mitad de la tarea poniendo sus bloques rojos grandes ($r = 5a$) y dice: ''*Ya no va: el mío va a resultar más grande*''.

Esta falta de compensaciones es tanto más sorprendente cuanto que en el problema 7 cierto número de sujetos admite que si se agregan constantemente elementos de valor 1 a las dos paredes, éstas terminarán por igualarse. Pero desde el momento en que intervienen las diferencias ($a \gtrless r$), o, en el problema 7, el sujeto recuerda las diferencias iniciales, las respuestas a los problemas 6-8 atestiguan un olvido sistemático del marco concreto que le sirvió para resolver el problema 4. Se lanzan entonces a generalizaciones arbitrarias y abusivas cuya característica principal es la indiferenciación, es decir, la de no basarse en las abstracciones pseudoempíricas o reflexionadas que convendrían en cada caso, con o sin permanencia de la relación métrica fundamental $a = nr$ (o, en 8, $r = na$), donde n varía de 1 a 5. Desde este punto de vista, y psicológicamente, la abstracción constituye una diferenciación, aún cuando, sin referirse a las diferencias dadas entre los objetos o prescritas entre los modos de composición, se limita a separar una relación en realidad ya utilizada, pero para hacer de ella, por ''reflejamiento'', un nuevo objeto de pensamiento: sólo si se da esta condición se tornan posibles las ''reflexiones'' sobre las reflexiones anteriores, como lo suponen la construcción de las proporciones,

etcétera, y las generalizaciones adecuadas, esto es, las integraciones que equilibran las diferenciaciones.

§ 4 | El nivel IIB — Este nivel —representado sobre todo a los 9-10 años (con 3 casos de más de 10 años)— que constituye la fase de equilibrio del precedente, se caracteriza por la resolución acertada del problema 4, con la progresiva comprensión de una relación multiplicativa $a = nr$ y $A = nR$ que tiende a reemplazar los procedimientos aditivos, pero a veces sin generalización inmediata cuando se cambian los números, y, sobre todo, sin solución del problema 5 que, por las razones ya vistas, resulta más abstracto. Por otra parte, los problemas 6 y 7 dan siempre lugar a dificultades (cambio de la relación en 6 y de la diferencia absoluta en 7). En cuanto al problema 8, se considera que la igualación sigue siendo imposible.

Veamos ejemplos de reacciones frente a los problemas 4 y 5:

FAV (9;1). *Problema 5* (con *a* y *r* presentados como muestras en una relación de 1 a 5 y con la línea azul trazada por el experimentador): *"Si no se conoce el número, no se puede saber"*. Para $N = 10$ indica muy rápidamente y en forma correcta el segundo, pero para $a = 3r$ comete un error de cálculo.

LED (9;10). *Problema 5: "Sin números no se puede saber"*. Para 10 y $a = 5r$: *"En un* (*a*) *hay cinco* (*r*), *entonces cinco y cinco igualan a diez"*, mostrando el indicador en el segundo.

DID (10;2). *Problema 5* (para $A = 5r$): *"La pared roja llegará quizás a la mitad: depende del número que se tome"*. En cambio para $N = 10$ indica inmediatamente el segundo bloque azul, y para $N = 12$ pasa de 2 a un medio. Pero cuando intenta usar los conocimientos escolares (multiplicaciónes y divisiones), se confunde muchísimo, como le sucede a casi todos los sujetos de este nivel.

LOS (10;2), para el problema 5, observa espontáneamente: *"un azul vale cinco veces el rojo"*, pero traza una línea roja cuya longitud es mayor que la mitad de la azul; después, tras una larga reflexión: *"más o menos la mitad"*. En cambio, con 10 bloques, dice: *"No, me equivoqué, llega hasta allá* (acertado)*"*. Para $N = 9$ y $a = 3r$, rechaza el dibujo de las líneas, pero señala correctamente el tercio, justificándolo aditivamente *"tres más tres más tres, igual a nueve; eso da tres, pues tengo nueve"*.

Vemos que en el problema 4, con bloques, estos sujetos ya no proceden, como en el nivel IIA, por adiciones sucesivas de las diferencias, sino comprendiendo y utilizando la relación básica $a = nr$. Esto quiere decir que implícitamente alcanzan la relación multiplicativa, pero, desde el momento en que tratan de hacer los cálculos escolares, dan una impresión de completa falta de asimilación. Por el contrario, en el Problema 5, o bien no hay ningún progreso en relación con el nivel IIA o bien el niño dibuja una línea roja más corta, lo que constituye un comienzo de comprensión, pero ocupando por lo menos la mitad de la longitud azul. Sin embargo, con frecuencia, nota espontáneamente la relación básica ($a = 5r$), pero esta relación sigue siendo inoperante en lo abstracto y Did dice, incluso, que "depende del número (*N*) que se tome."

En estas condiciones de abstracción insuficiente, aún no se dominan los problemas 6 y 7, porque se trataría de comparar dos pares de conjuntos (antes

y después de los agregados), y una comparación así supone una abstracción a la segunda potencia.

FAV (9;1) como se ha visto, resuelve bien la prueba 4 para $N = 10$ y $n = 5$ poniendo el indicador en el segundo bloque azul. Pero cuando se agregan diez nuevos elementos (problema 6), declara que *"cuando todavía se agregan* (bloques) *así, da cada vez cinco por dos* (¡y no cinco por uno!); *entonces allá* (vuelve a poner el indicador en el segundo azul)". El niño procura, pues, conservar la relación $a = nr$, pero no lo traslada al todo y se imagina que con $N = 20$ llega al mismo resultado (absoluto, no relativo). Para el problema 7, razona de igual modo y dice *"hay que contar"* como si se tratara de una relación y no de la diferencia absoluta $+ N'$.

RAN (9;6) razona del mismo modo (para $N = 12$ y $n = 3$): *"Hay tres* (rojos) *en uno* (azul); *entonces, si se agrega esto da tres azules":* por lo tanto, pone el indicador en el tercero azul (sobre 24), mientras que para el problema 4, ¡lo ponía correctamente en el cuarto! Para el problema 7: *"La diferencia no será así* (= lo que sobrepasaba antes). *Los suyos son más grandes y los míos pequeños, no puede haber la misma diferencia".*

CAR (10;4). *Problema 6: $N = 9$, $a = 3r$,* se agregan nueve azules y nueve rojos, duplicando de nuevo el todo. Car prevé entonces un alargamiento sensible de la pared roja (aunque inferior al doble), pero sin modificación de la azul. Para el problema 7, la diferencia aumentará en favor de los azules.

GAR (10;2). *Problema 7: "Los suyos son más grandes* (los azules). *Entonces cuando usted agrega, y yo también, los mismos, su pared se alarga más rápido".*

Por lo que se refiere al problema 6, es sorprendente que estos sujetos, que en líneas generales resuelven correctamente el problema 4 fundándose en la relación básica $a = nr$, no lleguen a conservarla (Cat) o a aplicarla al todo (Fav y Ran) cuando se anuncia el agregado de elementos azules y rojos respectivamente idénticos a los precedentes. Y sin embargo se indica el número N' de elementos que se van a agregar a los N y se muestran otra vez dos de los bloques que se están empleando para que se comprenda correctamente su equivalencia con los precedentes (de lo cual, por lo demás, el sujeto nunca duda). No vemos otra explicación que ésta: ocurre que, como ya se dijo (pero la cuestión se torna más sorprendente tras la resolución más correcta del problema 4), el sujeto ya nada tiene que hacer con sólo las colecciones $A1$ y $R1$, pero sí con otras dos ($A2$ y $R2$) y, sobre todo, con una nueva totalidad ($A1 + A2$) y ($R1 + R2$): en este caso se hace necesario efectuar dos tipos de abstracciones y compararlas, en una abstracción de rango superior, lo cual, desde el punto de vista de las operaciones, indudablemente vuelve a apoyarse en proporciones por lo menos implícitas, sobrepasando así los correlatos cualitativos del nivel IIA y aun las relaciones simples comprendidas en IIB para el problema 4. Por lo tanto, serían las dificultades de estas nuevas abstracciones las que retardarían la generalización. Respecto del problema 7, podría parecer más fácil, porque la relación entre los $A2$ y los $R2$ es sólo una relación de equivalencia, pero falta compaginar esas equivalencias con la relación $A1 = nR1$ presente en el primer conjunto, lo que conduce al sujeto a pensar que ésta prevalecerá tanto más cuanto que casi únicamente a partir de ese nivel, de

modo general, se diferencian el alargamiento de un móvil y su desplazamiento (aún confundidos por Gar).

Queda la prueba 8, que tampoco sale bien, aunque en otras situaciones la idea de compensación sea, en general, precoz:

LEB (9;10) para $N = 10$ y $a = 5r$: *"Vale dos; hay que tomar seis para lo que falta, y también uno para los pequeños. No, seis para los pequeños y tres para los grandes"*. Olvida, pues, la relación $n = 5$ y la reemplaza por $n = 2$; después cambia de opinión: *"Los míos son cinco veces más pequeños y* (= pero) *si tomo los grandes, sobrepasará la mía: no puede alcanzar, los pequeños* (que se agreguen a la pared azul) *no pueden hacer alargar como los grandes a los míos"*. A continuación se consagra a una serie de combinaciones, con errores de cálculo o con dibujos, pero con la constante preocupación de no agregar demasiada cantidad de bloques grandes a sus 10 bloques pequeños para no sobrepasar la pared de 10 grandes, a la que sólo pueden agregar bloques pequeños. Conclusión: *"Ni con los cálculos, ni con el dibujo resulta posible... siempre alguno sobrepasa: o el rojo o el azul"*.

BRU (9;6) para $n = 2$, lo que simplifica, no sale mejor: cada ensayo le permite prever un excedente final, y concluye: *"Hay que calcular bien, pero creo que esto es simplemente imposible"*.

GUI (10;2) para $N = 9$ y $a = 3r$ presenta las mismas reacciones que Leb con la misma tendencia a reemplazar $n = 3$ por $n = 2$ en cuanto razona acerca de las compensaciones. Por momentos tiene miedo de sobrepasar con sus bloques grandes; por momentos dice: *"No, usted con sus bloques pequeños sobrepasará a la mía: hay que tomar menos, hay que tomar la mitad...* (etc.). *No: es imposible"*.

CIN (10;8) para $n = 5$ se detiene después de cada comienzo de ensayo diciendo finalmente: *"Usted avanza lentamente* (con sus pequeños azules) *y yo muy rápido con los grandes. No, no llego, creo inclusive que es imposible que usted y yo logremos una igualdad tomando otros"*.

El problema sólo consiste, empero, en obtener $NA1 + NA2 = NR1 + NR2$ o $A1 = nA2$ y $R2 = nR1$, lo que parece de una simplicidad total, porque basta con conservar N e invertir el sentido de n. Pero la dificultad estriba en conservar la relación n, cosa que los sujetos no hacen, ya sea porque la reemplazan por $n = 2$ como si "más pequeño" significara siempre "la mitad más pequeño" (Leb y Gui), ya sea porque la descuidan (incluso para $n = 2$ como Bru) para limitarse a la abstracción pseudo-empírica de los incrementos lentos y rápidos (Cin). La razón de estos fracasos es, pues, nuevamente, la falta de generalización de n, pero debida también a una insuficiencia de la abstracción reflejada de esa relación básica.

§ 5 | EL ESTADIO III. — Con el estadio de los 11 - 12 años, que es el del pensamiento formal, o sea, de las abstracciones operadas sobre abstracciones, o de la reflexión a la enésima potencia, el sujeto descubre por fin las soluciones; pero sólo llega a ellas en dos etapas: en IIIA sale airoso del problema 6, pero fracasa ante el 7 y también ante la prueba 8 después de numerosos tanteos; en el nivel IIIB, por el contrario, el acierto es general o inmediato. Veamos algunos ejemplos de IIIA en relación con los problemas 4 y 5.

FED (10;8). *Problema 5:* anticipa inmediatamente, antes de haber trazado la línea azul: *"El mío será cinco veces más pequeño"*, pero, en cuanto se dibuja esta recta: *"No puedo saber, hay que conocer la cantidad de ladrillos empleados; si no, es imposible"*: considera, pues, necesaria la relación $A = 5R$, puesto que $a = 5r$ en la pareja que sirve de muestra, pero como buen representante de los comienzos del estadio formal, ¡se niega a concretarlo!. Respecto del problema 4, no hay dificultades.

KRU (11;5). *Problema 5: "El suyo será cinco veces más grande... y sé adonde llega el mío"*. Generaliza correctamente a propósito de las otras relaciones: 1/11 para $n = 11$, 1/3 para $n = 3$, etcétera. Ante el problema 4, se confunde en sus cálculos a pesar de razonar correctamente, y para $N = 9$ y $n = 3$ multiplica 3 x 9 = 27: *"¿Dónde está el veintisiete? Es para determinar adónde llega el rojo en relación con el azul, que tiene nueve y sé que eso da tres veces menos, da un tercio"*.

Veamos un ejemplo del nivel IIIB en relación con los mismos problemas 4 y 5:

BAR (10;5) ante el problema 5: dibuja una línea e indica correctamente: *"Eso da un quinto del suyo.* ¿Y si se continúa mucho más? *— Da siempre un quinto; sé que su pared es cinco veces más grande"*. Se le proponen N de 100, 125 y 50 y sigue diciendo: *"Siempre da un quinto; no puede cambiar"*. Después generaliza para $n = 3$, etcétera. y traduce sus dibujos a cantidades de bloques.

Vemos cómo el progreso de la abstracción basada en la relación fundamental favorece la generalización, a pesar de las reacciones paradójicas del nivel IIIA por una dificultad en volver de lo abstracto a lo concreto. Veamos ahora algunos ejemplos de reacciones IIIA a las pruebas 6 y 7, la primiera de las cuales es acertada, mientras que en la segunda se produce una confusión entre las diferencias (relaciones) y lo que sobrepasa (diferencia absoluta), con indiferenciación entre las operaciones numéricas aditivas y multiplicativas:

PIE (10;5). La prueba 6 es resuelta correctamente, pero en el problema 7 hay una equivocación tras un buen comienzo: *"Siempre habrá la misma diferencia* (absoluta, para $N = 45$ y $n = 3$), *pero los dos serán más largos"*. Muestra entonces correctamente la identidad de las partes que sobrepasan y comenta: *"La diferencia será de treinta, porque 45 : 3 = 15; entonces, de quince a cuarenta y cinco da la misma diferencia, incluso si se hacen agregados"*; pero continúa: *"porque mi pared será siempre el tercio de la suya y quedarán siempre los dos tercios"*, lo que constituye un paso a la diferencia-relación.

KRU (11;5). *Problema 6:* $N = 9$, $n = 3$: ¿Y si se agregan grandes y pequeños a cada pared? — *"Da siempre tres veces más, y para el rojo siempre queda un tercio"*. Pero en el problema 7, permanece en la misma relación: *"Siempre resultará que la pared roja es un tercio de la azul; eso no cambia si se añaden los mismos"*.

HOS (11;8) conserva, ante el problema 6, la relación para $n = 5$; y también para $n = 4$, a pesar de los sucesivos agregados, pero ante el problema 7 dice: *"El azul va a sobrepasar siempre, incluso como antes, porque es siempre la misma diferencia, siempre un quinto, y los pequeños* (agregados) *no pueden alcanzar a la pared roja"*.

El gran progreso señalado por el nivel IIIA, ya visible a propósito del problema 5 y del que la prueba 6 es sólo una concretización, radica en que el sujeto conserva suficientemente la relación fundamental $a = nr$ para extraer de ella, por abstracción reflexionante, una generalización a propósito de todos los agregados que la respetan: de ahí el éxito frente al problema 6. Pero ese gran paso adelante se paga con una generalización abusiva en ocasión del problema 7, con indiferenciación entre lo que sobrepasa (diferencia absoluta) y la relación (diferencia relativa), o, si se prefiere, entre las composiciones aditivas y multiplicativas, pero, en este caso, ¡con primacía de las segundas! Esta diferenciación, por el contrario, es alcanzada y explicada en el nivel IIIB:

PIZ (11;5) *Problema 6: "Siempre queda un quinto". Problema 7: "Ya no da la misma fracción esta vez, pero no puede sobrepasar* (= cambiar) *ni más ni menos, porque usted hizo la prolongación con los mismos".*

EGA (12;2) después de un comienzo de nivel IIIA declara: *"Hay que restar la pared R de la pared A: no basta con dividir por 5* (la primera parte de las paredes está en una relación de 1 a 5)... *queda la misma diferencia de metros* (= de unidades) *si usted quiere, pero no la misma fracción. Para que quede la misma fracción, habrá que agregarle a la pared A un trozo cinco veces más grande: se agregó lo mismo, entonces cambia la fracción, pero no la diferencia".*

Vemos cómo esta diferenciación se ha vuelto nítida. En cuanto al problema 8, se resuelve a partir del nivel IIIA, pero con titubeos:

ISA (10;8) para $N = 10$ y $n = 5$: comienza por 8 (= número de bloques que señalan la diferencia entre A y R); después agrega 2: *"Eso va a hacer igualar con los suyos si usted también toma los diez, pero de los pequeños".* Efectúa el mismo rodeo arbitrario para $N = 12$; después también acierta.

FED (10;8) los mismos datos: comienza por 8 pequeños en A y 8 grandes en R; después agrega 1 de cada uno, y por último 1 más, de donde resultan 10 de cada uno, diciendo: *"Me confundí; uno grande es igual a cinco chicos. Llegaremos hasta allí".*

En cambio, en el nivel IIIB la solución es inmediata:

ZIM (12;3): *"Hay que tomar las cantidades como antes: se tomaron diez grandes y diez pequeños; entonces hay que hacer al revés: diez azules pequeños y diez rojos grandes; así se igualan, porque es lo mismo pero al revés".* Para $N = 30$, la misma respuesta.

DEM (13;5) por un instante cree que la solución es imposible, después dice, inmediatamente: *"Yo tomo ahora los grandes, y usted los pequeños: da el mismo resultado si yo tomo también diez. Es lo mismo, pero al revés. Pero es necesaria siempre la misma cantidad de pequeños y de grandes".*

Es sorprendente que haya que llegar a este nivel de edad para razonamientos tan simples: pero es un caso donde sólo la abstracción permite la sencillez deductiva.

§ 6 | CONCLUSIONES. — Caracteriza a todo el desarrollo cuyas etapas acabamos de describir un laborioso ajuste de las abstracciones y de las generalizaciones, lo que equivale a decir, más precisamente, de las diferenciaciones (correspondientes al aspecto de "reflejamiento" de la abstracción reflexionante) y de las integraciones (correspondientes al aspecto de "reflexión" en tanto reorganización de la nueva totalidad). La ley de esta evolución puede expresarse, por tanto, en términos de equilibración gradual entre la diferenciación y la integración.

Recordemos primero las tres indiferenciaciones que subsisten en el nivel IA y explican sus lagunas: entre la coordinación de las acciones (extracciones simultáneas o biyecciones) y su resultado (longitud de las hileras), entre la forma y el tamaño de los bloques y entre el número de éstos y la longitud de las hileras. En el nivel IB, comienza una triple diferenciación correspondiente, por "reflejamiento" de las acciones en el plano de las conceptualizaciones. En el primer punto esta abstracción diferenciadora es completa: la abstracción reflexionada de la extracción simultánea ("se ha tomado a la vez", etcétera) engendra la formación de una nueva totalidad (la continuación posible de esas biyecciones en otros resultados ya obtenidos y comprobados por abstracción pseudo-empírica); de ahí la integración generalizadora de una igualdad que se conserva en la continuación. En el segundo punto comienza la diferenciación, por reflejamiento de las diferencias cualitativas de forma/tamaño en el plano de las extensiones: "cinco pequeños sobre (o en) uno grande"; pero falta en ello una abstracción o diferenciación de la aditividad como tal. En efecto: ésta sólo es utilizada implícitamente, pero aún no es tematizada en forma reflexionada; de ahí la diferenciación muy insuficiente en el tercer punto: el sujeto admite que la pared azul será "más larga", pero ello se limita a una diferencia mínima, sin ninguna cuantificación métrica. De ahí proviene el fracaso *a fortiori* en las diferenciaciones e integraciones que supondrían las soluciones a las pruebas 5 a 8.

En el nivel IIA la aditividad de las unidades, ya utilizada implícitamente en las medidas para una sola pareja $a > r$ en el nivel IB, se diferencia por reflejamiento en un plano de tematización, es decir, se convierte en objeto de pensamiento después de haber servido sólo como instrumento en la acción (superposición). Se deduce que el sujeto se ve obligado a considerar una nueva totalidad: el conjunto de las parejas $a > r$, reforzado por la abstracción pseudo-empírica de su relación de equivalencia: de ahí, en "comprensión", la captación de los correlatos ($r2$ es a $r1$ como $a2$ a $a1$, etc.), lo que implica, por extensión, la adición de las diferencias: $A - R = (a1 - r1) + (a2 - r2) + \ldots$), etcétera. Pero esta adición todavía no es una relación, sobre todo cuando se la efectúa de a poco, por correspondencias sucesivas entre cada pareja $a > r$ y la pareja que sirve de muestra. Por lo tanto, todavía no hay abstracción de una equivalencia cuantitativa entre las relaciones $a > r$ y $A > R$ (lo que constituiría una proporción) (*); dicho de otro modo, de la multiplicación $A - R = N$ $(a - r)$, traduciéndose N en un cociente. Ahora bien, esta relación general de naturaleza multiplicativa sería necesaria para resolver los problemas 5 a 8:

(*) Hemos notado $A - R = a - r$ para indicar que, según el sujeto, la diferencia $A - R$ equivale solamente a una diferencia $a - r$ en valor absoluto.

de ahí su fracaso en el nivel IIA. Pero, si bien es necesaria, no basta, como lo demuestran las reacciones del nivel IIB.

En este nivel posterior, la relación general comienza a ser abstraída de las operaciones aditivas precedentes, según un proceso de abstracción que será analizado en el capítulo II: la multiplicación "n veces x" es una adición de adiciones en la que el sujeto empieza por considerar solamente el aumento acumulativo de x para abstraer finalmente el número de veces que efectuó esa operación y, por tanto, el multiplicador como tal (n). Pero eso no basta para resolver los problemas 5 a 8, como lo muestran en particular los sujetos Fav y Ran que explícitamente procuran conservar la relación $a = nr$. En efecto : lo propio de las pruebas 5-8 es que, una vez hallada la relación entre A y R para el problema 4, se sumergen los elementos $A1$ y $R1$ en una nueva totalidad, en razón del agregado de nuevos bloques (o, en el problema 5, porque sólo se indica el proceso acumulativo): en este caso se trata, en primer lugar, de determinar la relación entre los a y los r para las nuevas series $A2$ y $R2$, y aún cuando el sujeto afirme que se trata siempre de la relación inicial (como lo señalan Fav y Ran); es necesario a continuación coordinar $A2 + R2$ y $A1 + R1$ dentro de una nueva totalidad. Ahora bien: Desde el punto de vista de la abstracción hay un proceso complejo que exige: 1) una abstracción referente a cada una de las parejas $A1\ R1$ y $A2\ R2$ (con reflejamiento y reflexión en el plano de las conceptualizaciones); y, sobre todo, 2) una comparación entre ellos, lo que constituye entonces una reflexión sobre las reflexiones anteriores, y, por tanto, una abstracción a la segunda potencia (en relación con 1, o a la enésima potencia en relación con todo lo que precede); 3) esto equivale entonces a una integración (reorganización reflexiva de la totalidad) que equilibra las diferenciaciones (abstracciones parciales, incluida la de las equivalencias de relaciones para el problema 6 y la de las diferencias entre $A1\ R1$ y $A2\ R2$ para la prueba 7). Por tanto, es natural que la progresiva abstracción de la relación multiplicativa que caracteriza el nivel IIB no baste para la solución de los problemas 5-8.

Pero es asimismo normal que el III, que es el de las reflexiones sobre las reflexiones (por lo tanto, del pensamiento reflexivo o formal), sea el estadio en el que tales soluciones se tornan posibles. En el nivel IIIA las pruebas 5, 6 y 8, que sólo requieren el establecimiento de relaciones entre los subsistemas y el sistema total, y el problema 5 (donde $a > r$ es comparado con una totalidad cualquiera), el 6 y el 8 se resuelven de modo inmediato o tras vacilaciones. En cuanto al problema 7, implica una diferenciación más, entre la relación (o diferencia relativa) y la porción que sobrepasa (o diferencia absoluta): ello provoca un retraso hasta el nivel IIIB.

Toda esta evolución está orientada por una ley de equilibración entre las diferenciaciones y las integraciones. Las primeras resultan del proceso de "reflejamiento" propio de las abstracciones reflexionantes, que de un nivel inferior extrae ciertas relaciones, empleadas de modo implícito, o simplemente implicadas pero no destacadas, para transformarlas en objetos de pensamiento en el nivel ulterior. Las segundas resultan entonces de la "reflexión" o reorganización necesaria, en el nuevo plano, del sistema así enriquecido por la introducción de tales objetos de pensamiento no considerados

hasta ese momento. La "reflexión", segundo aspecto de la abstracción reflexionante es entonces necesariamente generalizadora, en razón de que se refiere a una totalidad más amplia. Las relaciones indisociables de abstracción y generalización no son, pues, las únicas que determinan los dos polos del proceso de equilibración, sino, de modo más general, las de diferenciación y la integración. En cuanto a esta última, implica una acción del sistema total sobre los subsistemas y no se reduce sin más a un equilibrio o asimilación recíproca entre los subsistemas: en efecto, la integración en un todo conduce a la formación de leyes generales de composición que pueden diferir de las de los subsistemas, y los resultados que preceden muestran suficientemente las dificultades que el sujeto debe superar para llegar a la constitución de esas totalidades coherentes.

La construcción de múltiplos comunes

EN COLABORACIÓN CON J.L. KAUFMANN Y J.F. BOURQUIN

Las operaciones multiplicativas de clases y relaciones, que consisten en construir un doble juego (o más) de clasificaciones o seriaciones según dos (o *n*) criterios, "a la vez", no presentan dificultades de construcción superiores a las de las operaciones aditivas (clasificaciones o seriaciones simples). Por el contrario, parece indiscutible que la comprensión de la multiplicación numérica es mucho menos fácil que la de la adición. Naturalmente, no hablamos de la adquisición escolar de las tablas de multiplicar o de sumar, sino de la significación de la operación multiplicativa como tal bajo sus formas más elementales, como 3 x 2 comparado con 2 + 2 + 2. A partir de varias investigaciones acerca de las proporciones, la linealidad, etcétera, mostramos en efecto, la tendencia muy general de los jóvenes a sustituir (y ordinariamente de manera errónea) las relaciones multiplicativas, por composiciones aditivas, por no comprender el sentido de las primeras (aunque sepan recitar de memoria las expresiones verbales correspondientes).

Desde el punto de vista de la abstracción reflexionante, existe allí un problema, y para abordarlo hay que encontrar antes un rodeo con el fin de evitar toda alusión a las designaciones lingüísticas o simbólicas de la multiplicación. El problema de los múltiplos comunes parece llenar esas condiciones cuando se lo plantea, por ejemplo, bajo una forma tan depurada como ésta: construir dos series iguales de fichas, unas azules y otras amarillas, tomando siempre a éstas de "dos a la vez" y las azules ¡de a "tres a la vez"! Si en èstas presentaciones tan generosas encontramos las dificultades habituales de la multiplicación, cabe esperar que lleguemos a determinar sus razones y, a la vez, las condiciones de abstracción reflexionante que hacen a la multiplicación utilizable y comprensible.

El procedimiento seguido es muy simple. Para las fichas, se presentan dos repertorios de colores diferentes y se pide que se formen dos conjuntos iguales (las mismas cantidades totales) tomando de a dos en dos las fichas del primer repertorio, a las que denominaremos *A*, y de a tres en tres las del segundo grupo (las llamaremos *B*).

Una vez resuelto el problema se hace que el sujeto explique cómo lo hizo y se lo interroga acerca de la posibilidad de realizarlo con acierto también con conjuntos más grandes o más pequeños. El segundo problema consiste en construir torres de la misma altura con bloques de dos colores y de tamaños diferentes, de los cuales unos (denominados *A*) valen 2 unidades y los otros (denominados *B*) 3 unidades. Los mismos problemas de generalización.

A partir de cierto nivel, se le plantea al sujeto un tercer problema, de engranaje de ruedas dentadas. Su diámetro es diferente: una, *A*, da siete giros mientras que la otra, *B*, da cinco. En ambas hay unas señales negras que se tocan en el punto de partida y vuelven a coincidir después de los cinco giros de *B*. Una vez comprobados los datos y antes de que se complete una rotación, se pregunta simplemente si las señales pueden volver a encontrarse una vez más y cuándo. Después de la comprobación se pregunta, además, si el proceso se repetirá en forma idéntica o si es irregular o fortuito.

Por último, después de la presentación de por lo menos, dos situaciones, se pregunta si esos juegos se parecen y por qué.

§ 1 | EL ESTADIO I. — A pesar de las dificultades para comprender la consigna (por otra parte instructivas en sí mismas), este primer estadio muestra ya de modo claro la diferencia entre la adición, en la que el pensamiento está centrado en los objetos a los que se unen otros, y, por tanto, en el resultado de esa unión, y la multiplicación, en la que se trata, además, de determinar el número de veces que se los reúne, y, por tanto, enumerar las operaciones como tales y ya no sólo sus resultados en tanto cantidad de objetos transferidos. Presentaremos algunos ejemplos del nivel IA;

NAT (4;6) pone dos veces 2*A* y 3*B*. "¿Dónde hay más? - *Allá* (*B*) *porque se pusieron* 3*B* a la vez y allá sólo 2*A* y 2*A*. — ¿Y si se desea que haya la misma cantidad? - Entonces se necesitan más *A* (pone 2, después cuenta y se asombra de la igualdad 6 = 6), *¡pero yo puse mucho!* — ¿Cómo se hace? - *Puse mucho.* Intentemos volver a hacerlo.— (Tanteos: agrega, y después quita, fichas *A*) — ¿Se puede hacer lo mismo que antes? — *No, se necesitan* 3*A* y 3*B*. — No está permitido. ¿Se puede llegar de otro modo? — (Pone 2*A* y 3*A*, y después agrega un *A*). — No se puede. — (Agrega entonces 2*A*; después toma con una mano los 3*B* ¡y con la otra 1*B*! *¡Así tomo los 3 a la vez!*" Se pasa a una construcción de columnas de fichas (para reemplazar a las torres de bloques): se colocan en vertical 2*A* y, en forma paralela, 3*B*: "*Esta es pequeña, y aquélla, grande.* — ¿Se pueden hacer dos torres del mismo tamaño? — (Agrega 2*A*). *Ahora B es pequeña y A es grande.* — ¿Y el mismo tamaño? — (Agrega 3*B*) — ¿Pero ésta es más grande? — (Agrega 2*A*, lo que hace, sin que lo haya previsto, 6*A* y 6*B*) *¡Ah! ¡Es del mismo tamaño!* — ¿Cómo se hace? — *¡Hay que poner mucho!*" Se ponen entonces 2*A* al lado de los 6*A*, y 3*B* al lado de los 6*B* esperando que se vea la relación: "¿Cuántos de éstos (2*A*) y de éstos (3*B*) hay que poner para tener el mismo tamaño? — ¡3*A* y 3*B*! ".

PAT (5;6) En primer lugar, se ponen las fichas *A* en vertical y las *B* horizontalmente; después, para simplificar, en dos filas horizontales superpuestas (correspondencia óptica), y Pat procede como Nat para las columnas, agregando ya 2*A*, ya 3*B*, hasta descubrir, para sorpresa suya, que llega a tener seis de cada una: "*¡Las dos iguales!* — ¿Cómo se hace? — *Yo no sé.* — ¿Se lo podría volver a hacer? — *No, no lo creo.* — Lo intenta de nuevo (el mismo procedimiento). — *¡Otra vez las dos iguales*!.

¿Cómo lo hiciste? — *Conté acá seis y allá seis* (¡pura imaginación!) — ¿Qué hiciste con tu montón? — *Tomé dos* (a la vez). — ¿Y con el mío? — *Tomé tres.* — ¿Cuántas veces tomaste tres? — *No me acuerdo.* — ¿Y dos?. — *Tampoco me acuerdo.* — Vamos a comenzar de nuevo, pero esta vez vas a mirar bien para acordarte. — (Lo hace). *Tomé cuatro veces las fichas pequeñas* (de las dos clases). ¿Cuántas veces las *A*? — *Cuatro veces.* — ¿Y las B? — *Cuatro veces*". Se pasa a las columnas verticales y Pat no comprende mejor que Nat, pero prevé que "*por último se llegará*", y señala el borde superior de la hoja que sirve de soporte, a la que, efectivamente, no se podría sobrepasar.

DAN (6;0) comienza por la torre de bloques y tras algunas vacilaciones llega a la igualdad; después cuenta (tras demorarse) 6*A* y 4*B*: ¿por qué el tamaño de todos modos es el mismo? — *Porque los B son grandes y los A no son igualmente grandes.* — ¿Y también se podrían hacer dos torres iguales, pero que sean más grandes? — *No.* — Lo intenta. — (Deshace el conjunto, hace varias tentativas y termina por rehacer lo que ya había construido). Se le muestran 3*A* y 2*B* uno al lado del otro; después, 6*A* y 4*B* (igualdad); a continuación, de nuevo 6*A* y 4*B*, pero concluye —sin que se le ocurra superponerlos—: "*Si, se pueden hacer dos torres y dos torres*". Se pasa a las fichas, pero de lo que precede no se desprende nada que lo haga más fácil: para obtener dos filas iguales "*habría que tomar tres A* así como *tres B.*" Dan, sin embargo, llega por agregados sucesivos a *tres* y *tres B* y a 2+2+2*A*, pero declara que "*hay menos B y es de los A de los que hay más*". Hay, pues, un sentimiento implícito de haber puesto A más veces pero ilusoriamente traduce esa cantidad de operaciones a la cantidad de objetos, y, por lo tanto, al resultado. Se ponen entonces las *A* y las *B* en correspondencia casi óptica, con un leve estrechamiento de las *B*: "*Falta acá y allá* (los dos extremos)".

Se puede caracterizar un nivel IB por el hecho de que el sujeto, tras comenzar con las mismas reacciones de incomprensión, llega a tomar conciencia de la cantidad de veces que tomó 2*A* y 3*B* en el caso de las fichas:

NAD (6;2) para la igualación de los conjuntos de fichas: "*No, es imposible porque en un lado hay dos y en otro tres*". Primero pone tres veces 2*A*, después cuatro veces 2*B* y los cuenta. Después, dos veces 3*B*, los cuenta y toma los 2*A* sucesivos contándolos. Tras la aprobación recomienza, pero esta vez toma alternativamente 2*A* y 3*B* cierta cantidad de veces sin contar: "*¡Ahora es lo mismo!* — ¿No hay más aquí? — (Las pone en correspondencia.) *¡Ah! ¡Me olvidé de que hay más B!* — Comenzará de nuevo para estar segura. — (Pone 2*A*, 3*B*, 2*A*, 3*B* y 2*A*, lo cual es correcto. — ¿Se llegará a lo mismo? — ... — ¿Ya se sabe? — *No, no se sabe.* — Mira. — (Los pone en correspondencia.) *¡Esta vez es lo mismo!* — ¿Se puede saber de antemano? — *No, no se puede.* — ¿Es por azar? — *Sí.* — ¿Cuantas veces tuviste que poner las *B*? — (Las cuenta) *Seis veces.* — ¿Y las A? ¿Cuántas veces te las pusiste en la mano? — *Seis veces.* — Comenzamos de nuevo: digamos que cuando tú tomas dos ó tres es un viaje. — (Pone 2*A* y 3*B*.) — ¿Cuántos viajes? — *Uno para las A y uno para las B.* — ¿Y para obtener la misma cantidad de *A* y de *B*? — Pone 2*A*, 3*B*, 2*A*, 3*B* y 2*A*.) — ¿Cuántos viajes? — (Mira el montón) *Tres para las A y dos para las B* — ¿Y cuántas fichas? — *Seis y seis* — ¿Por qué? — *Porque con las B hay tres y con las A hay dos. Hay menos A para tomar* — (por viaje). — ¿Cuántos viajes podríamos hacer si quisiéramos continuar? — *Acá dos y acá tres* (correcto). — ¿Siempre será así? — *No.*

Estos hechos son de una claridad notable. Los sujetos están tan convencidos de que ambos conjuntos llegan a la igualdad con la sola condición de que

se las construya por correspondencia término a término, que comienzan por deformar la consigna del juego de las fichas creyéndose en la obligación de poner siempre simultáneamente *2A* Y *3B*, lo cual, como dice Nat, "no es posible porque hay dos aquí y tres allá". Tras lo cual proceden por aportes sucesivos y alternados, procurando con frecuencia violar las reglas, pero ello no interesa. El interés, por el contrario, reside en su asombro general cuando, después de haber puesto sin ninguna anticipación ni intención alguna $2A + 3B + 2A + 3B + 2A$, descubren la igualdad $6 = 6$. Pat manifiesta que nada comprende, Nat supone simplemente que basta con poner muchas para alcanzar la igualdad sin sistema (como Pat al final cuando propone llegar hasta la parte superior de la hoja sin preocuparse por saber si las dos columnas llegarán allí al mismo tiempo) y Nat atribuye su éxito al azar. La confirmación de esta falta de comprensión es el hecho de que no se admita la posibilidad de reconstruir esa equivalencia: Nat dice que no sabría hallarla "porque se necesitan *3A* y *3B*" en cada jugada; Pat "no cree" en la reproducción de ese sorprendente resultado. Nad, antes de pasar a las reacciones del nivel IB, niega la validez de toda previsión. En cuanto a admitir una generalización a la posible igualdad de conjuntos más grandes o de las torres más altas, es obvio que eso es excluido *a fortiori*, puesto que la simple repetición ya lo es.

Queda entonces por explicar esa miopía ante las estructuras multiplicativas que son, sin embargo, tan simples y transparentes, y estos sujetos nos muestran por sí mismos las razones cuando intentan describir lo que hicieron. El único aspecto de su acción del que toman conciencia es haber agregado constantemente dos fichas de un lado y tres del otro, lo cual quiere decir que se centran en el resultado aditivo de esos traslados. En cuanto a saber cuántos traslados hubo, y, por tanto, qué número de veces agregaron dos o tres, es un problema diferente, porque se trata entonces de enumerar las operaciones y no los objetos, es decir, centrarse en las acciones, y aún en su mecanismo, y ya no únicamente en los resultados. Esto supone una abstracción más profunda, de naturaleza "reflexionada" y no sólo "pseudoempírica". Ahora bien: es de tomar conciencia de ello de lo que todavía no son capaces: "no me acuerdo", dice Pat, y cuando se le pide que comience de nuevo (por lo tanto $2A + 3B + 2A + 3B + 2A$, que conduce a $6A = 6B$) y que observe bien, ¡pretende haber tomado "cuatro veces" las *A* y otro tanto las *B*! Nad reacciona primero del mismo modo y traduce la cantidad de traslados a cantidad de objetos: ¡"seis veces" de cada uno! Es necesario expresar esos traslados en términos de "viajes" para que llegue por fin a contar tres para las *A* y dos para las *B*, pero negándose a una posible generalización.

En el caso de las torres iguales formadas por seis bloques pequeños *A* y 4 grandes *B*, el problema no se presenta así, porque la multiplicación está, por así decir, materializada en los objetos: $B = 3$ unidades y $A = 2$ unidades. Pero no hay, sin embargo, anticipación ni generalización de las igualdades obtenidas por tanteos. Por el contrario, se vislumbra un principio de compensación (en Dan): menos bloques grandes = más bloques pequeños, lo cual vuelve a hallarse (erróneamente) en su juicio acerca de los dos conjuntos de fichas por una especie de indiferenciación entre la cantidad de traslados (*n* veces A o B) y la cantidad total de objetos trasladados.

§ 2 | EL NIVEL IIA. — En este nivel de los 7-8 años el sujeto anticipa las igualdades como posibles, sin prever la programación y llega a ella por tanteos sucesivos:

CRI (7;0) pone primero 4 "montones" de *3B* y 4 "montones" de *2A*, y comienza a contar el resultado: "¿Por qué cuentas? ¿crees que son iguales? — *Sí.* — ¿Cómo lo sabes? — ... — *Puse 3B juntos y 2A juntos*". Después advierte el error y concluye que para tener la misma cantidad se necesita "*un montón más grande de A que de B; si no tendría menos de A que de B.* — ¿Entonces cómo se hace? — *Un montón más de A; son necesarios dos montones más de A que de B* (Hace el intento). *No, no es así*". Después lo logra y concluye: "*Si pongo dos montones de B habrá que poner tres de A.* — ¿Y da lo mismo? — *Sí.* — Y si se pone más de B, ¿también se podrá obtener la misma cantidad de A? — *Dos montones más de B y de nuevo tres de A.*" Para las torres de bloques, Cri comienza también por disponer cantidades iguales de cada lado; después, al ver la diferencia de altura, compara un *A* con un *B*: "*No, no se llega; los A tendrían que ser más altos*". A pesar de todo lo intenta: "¿Pero acaso no me dijiste que no se llegaría? — *Sí, pero habría que poner más de A, uno sobre el otro.*" Ve, pues, la compensación necesaria, al igual que en el caso de las fichas, y llega a *2B* para *3A*. Además, comprende que no se podría construir torres más pequeñas manteniendo la igualdad, pero que se la obtiene superponiendo los mismos bloques; de ahí *4B* y *6A*.

YVE (7;0) comienza con los bloques, y, como Cri, pone la misma cantidad de *B* y de *A*; después las compara, busca una compensación con *6B* y *7A* "*porque de otro modo la altura no es la misma*", y encuentra la igualdad para *6A* y *4B*. Para las fichas sigue un camino análogo, después intenta diversas compensaciones que conducen a 2 y 3, 4 y 3, 4 y 6, 6 y 3, 10 y 9, 12 y 10, y termina por encontrar la igualdad en 12 = 12, respetando constantemente la regla de tomar por vez *2A* y *3B*. En el caso de los engranajes, está de acuerdo en que las marcas negras se encontrarán si se da vuelta hacia atrás después de casi media vuelta hacia adelante, pero si se da una vuelta entera en sentido positivo, "*no se volverán a tocar* — ¿Por qué? — *Si se da vuelta lentamente.* — Entonces, ¿a veces se toca y a veces no? — *Sí, a veces se da vuelta demasiado fuerte y a veces demasiado lentamente*".

DOM (7;6) comienza, en el caso de las fichas, por negar la posible igualdad: "*No, sería necesaria la misma cantidad* (cada vez que se toma)", pero no obstante procura obtenerla mediante agregados sucesivos y examinando cada vez el resultado. Cuando ha colocado tres veces *2A* y dos veces *3B*, y por tanto ha obtenido 6 = 6, se detiene para examinar retrospectivamente cómo llegó a ello mediante extracciones desiguales, y dice "*tres veces* (*2*) *A y dos veces* (*3*) *B;* después sigue agregando parejas de *A* y tripletes de *B* y al llegar a *9B* y *10A* se detiene de nuevo para analizar: "¿Qué hiciste? — *Dos veces 3B, no Tres veces, y allá cuatro veces 2A* (en realidad cinco veces). — ¿Está bien? — *No sé.* — ¿Y antes? — Seis (y seis). — ¿Y si quisiéramos más que seis y seis? — *Los volvería a poner* (vuelve a colocar tres veces *2A* y dos veces *3B*) *Siempre pondríamos seis* (más). — ¿Cómo llegaste a saberlo? — *Conté.*" En el caso de las torres de bloques, emplea el mismo método, pero diciendo casi desde el inicio: "*Vi que 2A = 1B, y no que se necesitan más A para menos B*".

MIL (8;3) en el caso de las torres: "*No se podría* (hacerlas iguales) *porque los A no son de la misma altura de los B.* — ¿Entonces no es posible? — *Sí, quizás ...No, no se podrá*"; pero compara *A* y *B* y encuentra que *B* = 1 1/2 *A* de la siguiente manera: *A es igual a esto* (una parte de B) *y falta la mitad de eso* (B)". Se pone entonces a buscar la igualdad: apila *9A* y superpone los *B* hasta llegar a 6. Admite la posibilidad de una

torre más grande: "*Pondría siempre 3A y 2B.*" En el caso de las fichas, inmediatamente acepta, por transferencia, el proyecto de una igualdad y cree haberla encontrado con dos veces 2*A* y una vez 3*B*, después: "(Hace el intento) *No, no da bien: hay que poner además 3B y 2A. Así, las dos tienen seis*". Ruedas: las marcas se encontrarán "*cuando hayan dado una vuelta* (intento incompleto). *No, así no es, porque A es más pequeña que B: eso hace que ya no se encuentren... sí, cuando hayan dado varias vueltas.* — ¿Cómo? — *Dos veces* (*A*) *y una vez* (*B*). *Quizás tres vueltas* (A: intento). *No, nunca.* — Intenta continuar. — *¡Se encontraron!*" Vuelve a comenzar y cuenta: "*cinco vueltas.* — ¿Siempre la misma cantidad? — *No, puede cambiar.*"

RIC (9;0) a pesar de su edad tiene necesidad de largos tanteos para igualar las fichas y comienza, como Cri e Yve, por hacer la misma cantidad de "paquetes" de 3*B* y de 2*A*. Por fin: "*Lo encontré. Allá* (*B*) *es impar porque es por tres y acá* (*A*) *es par: hice dos paquetes de tres y acá tres paquetes de dos.*" Admite la generalización para $6 + 6 = 12$ y $12 + 6 = 18$, etcétera.

Este nivel es, para el problema de las fichas, el de un principio de toma de conciencia, aunque todavía incompleta, de la cantidad de operaciones que corresponde a "n veces x" donde n es la cantidad de veces que el sujeto toma x elementos y x es, en el caso particular fijado por la regla "2*A* o 3*B* a la vez". En primer lugar, cabe observar que respetando esta regla Cri, Yve, e incluso Ric, comienzan por hacer tantos "montones" o "paquetes" de 3*B* como de 2*A*, como si, para alcanzar la igualdad el número n en n veces x fuera independiente del valor de los x y bastara por sí mismo para asegurar la equivalencia (cosa que Dom rechaza, pero para rechazar primeramente la posibilidad de cualquier igualación entre los *A* y los *B*). Cabe observar a continuación que Cri y Ric (como otros) no emplean la expresión "n veces" sino que cuentan los n en términos de "montones" o de "paquetes" como si se tratara de subclases por reunir (de ahí, por lo demás, su indiferencia inicial por el número x), mientras que Dom, cuyo vocabulario parece más abstracto ("tres veces" los 2*A* y "dos veces" los 3*B*), se equivoca precisamente en la enumeración de esas "n veces". Pero ya se trate de cantidad de montones o de operaciones, el gran progreso verificado en todos estos sujetos es el descubrimiento de una compensación necesaria: si se apunta a la igualdad entre los dos conjuntos procediendo, en relación con una, por "n veces x" y, en relación con la otra, por "n' veces x'", y si $x > x'$, se debe compensar esa diferencia por $n < n'$, y recíprocamente si $x < x'$. Dicho de otro modo: aunque se proceda aún de modo aditivo por agregados tentativos de nuevos "paquetes" o "montones", estos sujetos comienzan a comprender un principio esencial de la multiplicación: la relación inversa entre el multiplicador y el multiplicando en caso de igualdad de los productos.

Respecto de las torres de bloques, también se encuentra el principio de compensación: "Vi que son necesarios más *A* para menos *B*", dice Dom. En cuanto a los engranajes, no se encuentra todavía ninguna relación numérica, y se rechaza la propia repetición de uniones entre las marcas del mismo modo que la de las igualaciones de fichas en el estadio I, lo que equivale a negar al mismo tiempo la regularidad del proceso físico y la constancia de las relaciones métricas.

§ 3 | EL NIVEL IIB Y EL ESTADIO III. — En el nivel de 9-10 años que llamamos IIB (con algunos casos a partir de los 8 1/2 años), el problema de las

fichas es resuelto poco menos que inmediatamente, mientras que el de las torres presenta alguna demora. En lo referente al de las ruedas, en cambio se verifica un progreso en relación con el nivel IIA en el sentido de la constancia que se le atribuye a la relación numérica hallada empíricamente:

TRI (8;6), en el caso de las fichas, reúne inmediatamente tres parejas de *A*, a las que compara con dos tripletes de *B* dispuestos frente por frente: *"Allá hay siempre seis y acá siempre seis.* — ¿Cómo lo hiciste? — *Tomé dos veces 3B y tres veces 2A.* — ¿Se podría continuar? — *Sí; se pone siempre dos veces 3B y tres veces 2A.* — Y si durante mucho tiempo siguiéramos colocando así, ¿tendríamos siempre la misma cantidad de los dos lados? — *Sí, siempre".* En el caso de los bloques, intenta con 6*A* y 3*B*, y como las alturas siguen siendo desiguales propone agregar un *A*: "¿Seguro? — *Pensé que así podría dar bien; hay que verificarlo."* "¿Y en más pequeño? — *Sí tres y dos.* — ¿Seguro? — *Hay que verificar".* Pero después de la verificación admite que se conservaría siempre la igualdad agregando tres y dos. En el caso de las ruedas Tri primero duda de que las marcas lleguen a encontrarse; después al comprobarlo, cree por un instante que la rueda pequeña dará cinco vueltas, las mismas que, según acaba de contar, ha dado la grande. "¿Seguro? — *Hay que verificar* (lo hace). *Era falso; A da siete vueltas mientras que B da cinco.*. Y si se las hace girar más veces, ¿las marcas volverán a encontrarse? — *Sí, si gira cinco veces B y siete A."*

VAS (9;11), en el caso de las fichas, pone inmediatamente tres parejas de *A*; después dos tripletes de *B*: *"Hice a cada una de seis.* — ¿Podrías hacer montones menos grandes? — *No, porque se deben tomar a la vez 2A ó 3B: si se hace un montón de tres fichas, estará bien para las B pero no para las A, y si se toman cuatro estará bien para las A y no para las B.* — ¿Y montones más grandes? — *Sí, por ejemplo doce."* No obstante, con los bloques ella primero duda de la posibilidad de hacer dos torres iguales *"porque el bloque B es más grande que el A"*; después procede por compensaciones sucesivas y llega a $3A = 2B$. En el caso de las ruedas, manifiesta una duda inicial; después la regularidad parece asegurada una vez que se descubre la relación numérica 7 a 5.

SER (10;12). Fichas: *"Pondría siempre de a dos y de a tres hasta que resulten iguales".* Lo encuentra para 6 y 12, etcétera, mientras que en el caso de los bloques, se comprueba la misma duda inicial y los mismos tanteos que Vas.

En el estadio III el problema de los bloques se resuelve, al igual que el de las fichas, estableciendo relaciones entre las unidades desde el punto de partida, con lo que se evitan las compensaciones por tanteo:

ERG (11;6) compara un *B* con un *A*: *"Es quizás el doble"*; después descubre la relación $2B = 3A$ y explica que $B = 1\,1/2\,A$ porque *"ahora tengo la prueba".*

MAN (11;8) explica que las marcas de las ruedas dentadas no se encuentran después de una vuelta porque la grande *"va siempre más adelantada... está siempre un diente más adelante"*; pero vuelven a tocarse *"después de cinco vueltas enteras".* Se evalúa la relación entre ambas primero como de 5 a 10 vueltas; después se comprueba que es de 5 a 7, y entonces se la considera constante.

GIL (12;6) hace girar dos ruedas dentadas cuya relación es de 4 a 6; tiene primero la expectativa de espera que las marcas han de encontrarse después de una vuelta: *"No, no es correcto* (continúa). *Obsèrvé que cuando se daban seis vueltas volvían a*

unirse, y si daban n menos vueltas, no. — ¿Y si se las hace girar más? — *Sí: seis, doce, dieciocho, veinticuatro; así anda.* — ¿Por qué? — *Porque es el doble, y entonces una vez* (más) *seis y vuelve.* — ¿Si se tuvieran dos ruedas del mismo tamaño serían necesarias también seis vueltas? — *No, una sola.* — ¿Y la pequeña? — *Menos vueltas, ¡ah! tampoco, porque es más pequeña.*"

La relación numérica de las vueltas de rueda da una certeza de regularidad mucho más sólida en la medida en que se acompaña de un comienzo de explicación cinemática como la traducción que Man hace de la rapidez angular en términos lineales de "más adelante", y, después, "un diente más adelante".

§ 4 | LAS COMPARACIONES HECHAS POR LOS SUJETOS ENTRE LAS TRES PRUEBAS. — Nos pareció interesante interrogar a los niños de los niveles precedentes acerca de las analogías que podían percibir entre los problemas presentados, aunque se tratase de lo que se puede llamar abstracciones "reflexionadas" y no "reflexionantes".

En el estadio I el único interés de esas comparaciones consiste en que se refieren a los objetos materiales en juego, y aún no a las acciones:

DAN (6;0) véase § 1) primero ve sólo las diferencias de forma: las fichas "*son cuadradas* (lo eran al comienzo) *y las torres son redondas.* — ¿Pero los dos juegos podrían ir juntos? — *No, éstas* (fichas) *son planas; no pueden crecer* (en altura). *Sí, se hubiera podido hacer así* (columna de cuadrados colocados horizontalmente sobre la mesa y que pueden representar una torre)".

En el nivel IIA, en cambio, se pone el acento en la acción, pero ante todo como fin y como relato de lo que se hizo:

CRI (7;0 véase § 2). Las fichas y los bloques se parecen "*porque también se hace... se hacen pequeños montones y se hacen torres.* — ¿Y después? — *También se logra que las torres tengan las misma altura y que haya la misma cantidad de fichas*".

CHA (7;2): "*Se parecen porque todo el tiempo debe haber lo mismo.* — ¿Qué hiciste en los dos juegos que sea parecido? — ... — ¿Nada? — *No*". Después, cuando se le sugiere que compare los bloques y las fichas acepta primeramente la comparación de los bloques grandes *B* y las tres fichas *B*; después, la de los bloques *A* y de las dos fichas *A*, pero agrega: "*No, no está bien; serían necesarios tres bloques B para que esté bien*".

DOM (7;6 véase § 2). Los dos juegos se parecen "*porque se buscaba la misma cantidad de fichas y la misma cantidad de bloques.* — ¿La misma cantidad? — *No, el mismo tamaño.* — ¿La misma cantidad de bloques o el mismo tamaño? — *La misma cantidad*".

MIL (8;3 véase § 2): "*Si, porque usted dijo tres fichas B y dos fichas A y tres bloques B y tres Bloques A*". Invierte, pues la relación de los bloques. Se intenta precisar poniendo bloques y fichas enfrentados: "*No, no se pueden poner tres fichas A y dos B ... ¡no se hacen torres con fichas!*"

Vemos que estas comparaciones siguen siendo funcionales y no alcanzan a las correspondencias estructurales, salvo para simplificarlas con errores,

como Dom y Mil. Por el contrario, son tales correspondencias las que las abstracciones reflexionadas del nivel IIB procuran descubrir:

TRI (8;6 véase § 3) sólo fue interrogado respecto a las semejanzas entre el problema de las torres y el de las ruedas: "*Siempre hay una cosa más grande y una más pequeña, y siempre es necesaria más cantidad de pequeños para hacer grandes.*"

VAS (9:11, véase § 3) "A las fichas B se las puede tomar solamente de a tres, y a los bloques B también (= valen 3), mientras que en el caso de las fichas A se las tomaba de a dos como en el de los bloques A. — Explícame. — *Porque de los bloques B hay menos que de los bloques A, entonces las fichas A pueden ser más numerosas para ... un conjunto ... Se hace un cambio* (quiere decir una correspondencia). — ¿Cómo un cambio? Muéstramelo. — (Pone en correspondencia sobre la mesa dos fichas A con un bloque A y tres fichas B con un bloque B)

JOE (10;0) Torres y ruedas: "*Se necesitan más bloques A que B. Allá es lo mismo: más vueltas con la rueda A que con la B.* — ¿Qué serían las marcas en el caso de las torres? — *Cada vez que se encuentran habría otros tres bloques A*". En el caso de las fichas y las torres, la correspondencia es correcta, como en Vas.

SER (10;2 véase § 3): la misma correspondencia 2 a 3 para las fichas y los bloques.

Las reacciones del estadio III no son distintas de estas correspondencias estructurales. Como se ve, esas abstracciones "reflexionadas", en tanto tomas de conciencia del resultado de las abstracciones reflexionantes, se corresponden bastante con estas últimas en sus etapas sucesivas. En seguida volveremos a ello.

§ 5 | CONCLUSIÓN. — El primer resultado de esta investigación es hacernos comprender la diferencia entre las dificultades que el niño encuentra en la multiplicación de las clases o relaciones, dominada en el mismo nivel que las clasificaciones o seriaciones simples, y la multiplicación de los enteros, cuya comprensión es manifiestamente más difícil que la de la adición numérica. Sin embargo, en un primer intento, parece existir un estrecho parentesco entre la multiplicación de las clases y la de los números: al hacer el producto de las dos clases, "redondos" y "cuadrados" (en el caso de los pequeños cartones que el niño debe ordenar) y el de las tres clases, "blancos, azules y rojos", el sujeto obtendrá una tabla de seis casilleros, y, por lo tanto, seis subclases: "redondos blancos, azules o rojos" y "cuadrados blancos, etcétera", así como al multiplicar 2 por 3 se obtienen 6 unidades numéricas. Pero la gran diferencia psicológica reside en que en el primer caso el sujeto no tiene necesidad de contar las clases y puede limitarse a construirlas "en comprensión", por asociación de las propiedades cualitativas en juego. Por el contrario, en el caso de los números que hacen abstracción de todas las cualidades, es decir, cuyas unidades son a la vez distintas y completamente equivalentes entre sí, es indispensable, para comprender la relación "n veces x", enumerar en "extensión", no sólo las unidades x (que están desprovistas de toda "comprensión"), sino también el número de veces n que se han tomado conjuntamente x unidades: en este caso la enumeración de los n supone el

cómputo de la cantidad de clases de x elementos reunidos en "paquetes"; pero como las clases de x (las clases de dos fichas; en nuestro ejemplo, 3 x 2) no poseen ninguna característica distintiva en comprensión, enumerar los n equivale a contar el número de acciones o de operaciones que se han efectuado, reuniendo n veces las unidades en x. Es entonces esta diferencia entre los niveles de toma de conciencia, según se trate de los objetos mismos o de las operaciones, que consisten en reunir los n veces en clases de x, la que explica la dificultad más grande de la multiplicación numérica en relación con la de las clases, y también en relación con la adición de enteros, en la que basta la enumeración de los objetos.

Dicho esto, se comprende entonces, en razón de ese mismo hecho, cuál es el juego de abstracciones reflexionantes mediante el cual se va a construir la multiplicación a partir de la adición.

La adición como tal no presenta problemas en la medida en que es la acción constructiva más elemental (desde las reuniones de objetos que se observa en los niveles senso-motores superiores). Así, en nuestro problema de las fichas los sujetos de 4-5 años (nivel IA) proceden inmediatamente a realizar agregados sucesivos de A de a dos y de B de a tres. Pero, como hemos visto, el carácter eminentemente instructivo de sus reacciones consiste en que no tienen conciencia alguna de la cantidad de n veces que agregaron x de 2 o de 3; y cuando sin preverlo llegan a la igualación $6 = 6$ se asombran tanto que creen imposible que se la pueda reproducir a voluntad. Es pues, manifiesta la existencia de una completa falta de comprensión de la multiplicación, que no es siquiera todavía una adición de adiciones, sino simple sucesión de adiciones, lo que no resulta lo mismo, por falta de plan previo y de una posterior síntesis.

En el nivel IIA la multiplicación es comprendida parcialmente, pero a título de adición de adiciones, en el sentido de que el niño procede por agregados sucesivos de "montones" o de "paquetes" de valores x o x' y después los cuenta como n o n' clases o subclases. Se llega a buen resultado, pero por vía aditiva, con síntesis posterior (n colecciones de $x = n'$ conjuntos de x'), pero sin que todavía haya plan y sin que se pueda hablar de una toma de conciencia de la operación de "n veces", porque la abstracción se refiere a los resultados. No obstante, así como en el nivel del comienzo de las operaciones concretas, el sujeto sabe que puede alcanzar aditivamente una misma suma mediante combinaciones variadas y de modo asociativo (en el sentido lógico del término), también, al comparar sus n "montones" de x con los n' "montones" de x', descubre que un producto idéntico supone compensaciones: si $x > x'$ entonces $n > n'$; dicho de otro modo, se necesitarán tantos más "montones" o "paquetes" cuanto más pequeños sean: de ahí los múltiplos comunes, por una asociatividad multiplicativa en sentido amplio.

Por último, así como las adiciones de adiciones resultan, en el nivel IIA, de una abstracción reflexionante (a título de síntesis e incluso sin plan) a partir de la sucesión de uniones, también en el nivel IIB la operación multiplicativa "n veces x", finalmente comprendida, constituye el producto de una abstracción reflexionante a partir de las adiciones de adiciones, en el sentido de que n no es simplemente el número de "paquetes" que hubo que hacer para llegar al fin, sino más bien el número de las operaciones constitutivas de

esas clases, y que en lo sucesivo pueden actuar en calidad de proyectos o esquemas programados, como lo muestran las soluciones inmediatas que los sujetos son capaces de obtener. Esto no equivale a decir que la operación multiplicativa sea inmediatamente general ni reversible (división) como lo muestran las investigaciones acerca de las proporciones y la persistencia, en este ámbito, de las soluciones aditivas hasta el estadio III, en lo que concierne a nuestro problema elemental de las fichas, ya no hay dificultades.

En cuanto a las torres de bloques, si bien el problema parece más simple porque la relación multiplicativa está, por así decir, materializada en los tamaños dados, la ausencia de unidades preestablecidas como lo son las fichas, en realidad lo complica. Respecto de las ruedas dentadas a ello se agrega que la relación numérica expresa variables cinemáticas. Sólo que es más sorprendente ver que, una vez reconocida, esta relación da un carácter de regularidad a tal proceso físico, mientras que la unión reiterada de las marcas al cabo de cinco giros de *B* provocaba, aún en los sujetos del nivel IIA, ese sentimiento de asombro y de mero azar que la igualación de las fichas suscitaba en los niños del estadio I.

Queda por plantear el problema de las "abstracciones reflexionadas" en tanto producto reflexivo (esto es, en tanto objetos conceptualizados de representación o de conciencia) de lo que en la abstracción reflexionante sólo es proceso. Ahora bien: entre ellas y las etapas analizadas anteriormente existe una evidente relación. En el estadio I, en el que el sujeto no tiene conciencia de sus propias acciones de adjunción, la comparación reflexiva de las pruebas de fichas y de bloques fracasa precisamente ante el intento de rehacer esas acciones y se refiere sólo a los objetos materiales utilizados. En el nivel IIA, donde la abstracción reflexionante sólo se refiere a los "paquetes" de x trasladados y aún no se refiere al número n de operaciones de traslado (por tanto no se refiere aún a la relación de "n veces"), la abstracción reflexionada sólo alcanza a las acciones globales ("se hacen pequeños montones" Cri) en su objetivo general de igualación, pero sin alcanzar las correspondencias pormenorizadas de las estructuras (e incluso con errores, como en Dom y Mil). Por último, la abstracción reflexionante del número n de las operaciones como tales (en la relación "n veces x") conduce, en el nivel IIB, a la conciencia y a la conceptualización explícita de esas correspondencias estructurales.

La inversión de las operaciones aritméticas

EN COLABORACIÓN CON A. MOREAU

A pesar del aprendizaje escolar de las operaciones aritméticas, en general, sólo con bastante lentitud llega el niño a asimilar las relaciones de inversión que caracterizan a la suma y a la resta y sobre todo a la multiplicación y a la división, aún cuando con frecuencia se trata simplemente del doble o de la mitad. Es entonces interesante procurar analizar esta reversibilidad desde el punto de vista de la abstracción, pero en una situación que no le recuerda al sujeto los ejercicios de la escuela y que se presenta como un juego. Este consistirá en lo que sigue, en pedirle al niño que escriba en un papel un número inicial n sin decir cual es, que le agregue 3; después que multiplique por 2 el resultado obtenido y, por fin, que sume 5: de ahí surge el número terminal $n' = 2(n + 3) + 5$. El problema consiste entonces en juzgar si el experimentador, que ha estado dando la espalda y nada sabe de n, puede determinar el número inicial una vez informado del número terminal n'. Pero, naturalmente, se trata sobre todo de establecer el modo en que el niño, haya previsto o no la posibilidad de tal reconstitución, pueda, o no pueda, ser explicada por la inversión de las operaciones en juego.

Pero para determinar n a partir de n', no basta con invertir las operaciones: además hay que invertir su orden. Para hacer analizar esta segunda condición, se les propuso a los sujetos dos tipos de tareas distintas más prácticas: la construcción de un "hongo" por superposición de siete trozos de madera que se deben ensartar (en un orden necesario) en una varilla vertical y la construcción de un cubo grande por medio de ocho cubos pequeños de posiciones intercambiables. La comparación, que se le solicita entre las tres pruebas, así como la eventual invención por parte del sujeto de series de operaciones conmutativas o no, sugieren las reflexiones acerca del orden.

El procedimiento puede variar según la edad de los sujetos. Hasta el nivel de los 7-8 años se comienza siempre por la construcción del "hongo" presentando siete trozos de madera en desorden y preguntándole al niño qué se puede hacer con ellos cuando se los ensarta en una varilla. Los trozos, de colores diferentes, son de tamaños variables pero pueden ser seriados en función de sus superficies de sección, que permiten un ajuste preciso mediante la observación de un orden, y sólo uno de superposición.

La pregunta se refiere, pues, a ese orden y a su necesidad (en el nivel IA, en el que el niño no llega a descubrir el principio de la construcción, se lo ayuda un poco en su seriación). A continuación, se le hace desarmar el hongo (a veces llamado "lámpara" por los sujetos) alineando los trozos en el orden en que se va desarmando. Se interroga al niño con respecto del nuevo orden y se hace comparar los órdenes de construcción y de desarmado.

Se pasa después a la construcción de un cubo grande por medio de ocho cubos pequeños, formulando de nuevo las mismas preguntas acerca del orden y, sobre todo, pidiendo una comparación entre esta construcción (sin orden necesario) y la del hongo, lo cual requiere una "abstracción reflexionada".

Viene después el problema del cálculo (ubicado con frecuencia al comienzo a partir de los 8-9 años). En los sujetos más jóvenes (hasta 7 años) no se procede mediante cifras, sino por medio de pequeños cuadrados de cartón: se le pide al niño que ponga algunos en un pequeño paquete n; que agregue tres; después, que ponga enfrente otros tantos $(n + 3)$, y, por último, que agregue cinco. El niño cuenta entonces el todo n' y comunica esta suma al experimentador (que está de espaldas). El problema consiste en saber si éste puede determinar n y cómo puede hacerlo. Después de las previsiones del niño, se hacen varias pruebas y el sujeto debe explicar cómo fue posible dar las soluciones. A partir de los 7-8 años, se le pide primero al sujeto que escriba en una hoja un número n de dos cifras encerrado en un círculo; después que, por escrito agregue tres, duplique $(n + 3)$ y agregue cinco. Respecto de la reconstrucción de n las preguntas son las mismas.

A todos los sujetos se les pregunta en particular si el conocimiento del número terminal n' es necesario para determinar n y por qué. A continuación se interroga (sobre todo a los mayores) acerca del orden de las operaciones y se les hace comparar el juego del cálculo con la construcción del hongo. Por último, se pide una comparación general de las tres pruebas. Para los sujetos del nivel superior se agregan dos problemas: por una parte, se le pide al niño que construya él mismo series de operaciones cuyo orden puede ser necesario o no; por otra parte, se le presentan tales series homogéneas o heterogéneas para comparar pidiéndole que se pronuncie acerca de la necesidad o no, del orden, y sus razones.

§ 1 | EL ESTADIO I. — Es inútil proporcionar el detalle de las reacciones de un subestadio IA, en el curso del cual el niño experimenta serias dificultades para armar un hongo (por no centrarse en las superficies de sección, mientras que se consideran los tamaños, los colores, etcétera.) así como para percibir la diferencia entre el caso del cubo, donde el orden seguido resulta indiferente, y el del hongo, cuyo montaje exige un orden necesario. Por el contrario, el nivel IB, caracterizado por el logro de estas dos construcciones, es interesante desde el punto de vista del contraste total entre las respuestas respecto de los cálculos y las que se obtienen en el nivel IIA del comienzo de las operaciones:

ELI (6;6) comienza por la construcción de "una lámpara" formada por cinco elementos: después agrega los otros dos verificando por tanteos la correspondencia de las

superficies de aplicación: "*Hay que apilar los redondos.* — ¿De cualquier modo? — *No.* — ¿A qué hay que prestar atención? — *A su ubicación. Si se presta atención, se ve que están siempre en el mismo lugar*". Se deshace: "*Están puestos al revés.* — ¿Y para construirlos?. — (Muestra el orden correcto) — ¿Y para deshacer la lámpara?. — (Muestra el orden inverso). — Cuando se construye y cuando se desarma, ¿hay algo que se parezca? — *No.* — Los trozos, ¿no están en el mismo sitio? (se muestra el orden de la serie). — ...Cubos: la construcción inmediata es: "*más fácil porque hay que apilar* (no importa cómo). — ¿No prestas atención a dónde pones los trozos?. — *No, se puede poner el verde sobre el rojo, da lo mismo. En la lámpara hay que prestar atención*". Pero aunque describe tan bien las diferencias entre la construcción del cubo y la del hongo, Eli, en vez de separar la sucesión de las acciones con orden necesario en un caso y arbitrario en el otro, dice simplemente, cuando se le pregunta lo que es similar o no en las dos pruebas: "*Es lo mismo porque al final* (*lo alto*) *de la lámpara no es cuadrado*", como si sólo contara el contenido y no el orden de las acciones. Operaciones con cuadrados: "Pon sobre la mesa la cantidad de cuadrados que quieras. — (Pone cuatro)— Agrega tres cuadrados. Pon una cantidad igual a lo que tienes ahí, pero en otro montón... Ponlos todos juntos... Y agregas cinco más... ¿Cuántos tienes en total? — *Diecinueve.* — ¿Crees que puedo saber cuántos pusiste la primera vez?. — Sí, *usted lo adivina.* — ¿Pero para no equivocarme? — *Se piensa bien...* — ¿Cómo harías tú para saberlo? — ...— Yo creo que es cuatro: ¿crees que escribí cualquier cosa?. — *Usted sabía que yo había agregado tres, y que tenía diecinueve* (al final) Antes, 4 + *3 daba 7.* — ¿Entonces? — ...—Explica mejor. — ... —¿Me sirvió que me dijeras dicienueve?. — *No.* — ¿No sirve para nada que yo sepa cuánto hay en total? —... —Haz lo que dije antes. — *Puse cuatro, después me dijo que pusiera otros tres,* etcétera. (lo reconstruye correctamente). — ¿Entonces cómo pude saber que habías puesto cuatro al comienzo? — *Porque usted pensó bien*". Se invierten entonces los roles y el experimentador pone dos detrás de una pantalla y a continuación vuelve a hacer las operaciones + 3, x 2 + 5; Eli se da cuenta. "En total tengo diecisiete. ¿Puedes saber cuántos puse la primera vez? — *Tres.* — ¿Estás segura? —...— ¿Por qué tres? — *Porque se ve aquí* (muestra tres cuadrados que se apartan un poco del montón)". Se vuelve a comenzar entonces con cinco en el punto de partida y veintiuno en el total: Eli anuncia seis, al azar "*porque reflexioné*". — "¿Cómo calculas? — *Porque usted pone allí algunos*". Se le muestra entonces el procedimiento en detalle: "Yo hago así: se pusieron cinco al final, entonces se sacan 5; se ponía otro tanto (x 2, mostrándolo), entonces saco la mitad; y al comienzo se agregaban tres, entonces ¿qué hice? — *Usted puso cinco* (en el punto de partida). — ¿Pero para descubrirlo? — *Se cuenta que hay cinco, después se puso otro tanto... Se cuenta lo que resta... Como usted agregó, se los retira y se tiene cinco.* "Se vuelve a comenzar con todo a la vista y sugiriendo "mezclar los cuadrados si eso te ayuda": ella saca cinco, después tres. "¿Por qué sacaste tres?. — *Mucho no lo sé*".

SET (6;9) acierta con el hongo. "Cuando se lo construye y cuando se lo deshace, ¿hay algo parecido? — *Sí, son las mismas cosas*" Se hacen enumerar los órdenes directo e inverso, pero no ve la relación: "*No...* (no es) *tan*" parecido. Por el contrario, hay un solo orden posible en cada sentido, mientras que con los cubos "*hay varias maneras*" Pero estas frases se obtienen sólo en respuesta a preguntas sugerentes acerca de la cantidad de maneras en la construcción, mientras que cuando se hacen comparar simplemente las dos construcciones, Set se limita a decir: "*no se parecen porque el hongo no es lo mismo que los cubos*", "*porque los cubos son livianos... no son lo mismo*"; se centra, pues, sólo en el contenido y olvida la forma de las acciones, aunque la haya analizado bien en comprobaciones separadas. En cuanto a las operaciones con cartones, Set piensa que el experimentador puede adivinar el número inicial "*porque usted escuchó un ruido* (cuando ponían en su lugar los cartones). — ¿Tú crees que yo dije así y acerté? — *Porque usted sabía que yo había puesto más.* —

¿Eso puede servir para saber cuántos hay al final? — *Puede servir.* — ¿Cómo? — ...'' Como no comprende más que Eli, se piden sólo las adiciones $n + 5 + 3 + 4$. Set afirma : *Diecisiete''.* — Creo que pusiste cinco sobre la mesa, ¿es así? — *Sí* — ¿Qué es lo que dije? *Que puse cinco: usted adivinó.* — ¿Simplemente fue cuestión de suerte? — *Sí.* ''Se vuelven a poner los cuadrados sobre la mesa: $5 + 5 + 3 + 4$. ¿Me sirvió saber que había diecisiete? — *Sí* ¿Por qué? — *Usted hacía conjuntos, los hizo en su cabeza* (reúne cinco cuadrados). — ¿Qué quiere decir ese pequeño conjunto? — *Que son cinco''.* Pero no se encuentra en Set ninguna comprensión de la inversión.

LAR (7;0) piensa que para determinar n ''*usted miró.* — Pero no, si me di vuelta. ¿Entonces? — *Usted escribió cualquier cifra y después resultó verdad''.* Se repite todo a la vista; se le pide que quite cinco, después la mitad del resto; después tres y descubre el *n* del punto de partida (4): ''*¿es un azar, tuve suerte?* — *Sí.* —¿Eso no te da una idea del modo como se hace? — *No''.* Se vuelve al hongo, respecto del cual afirma nuevamente el orden de construcción y de puesta de los trozos sobre la mesa: ''¿Existe sólo una manera de disponer los trozos? — *Sí.* — ¿Y se parece en algo a los cubos pequeños? — *No, porque los cuadrados pequeños, no se pueden transformar en hongos''.*

SAN (7;1) está en camino hacia el nivel IIA porque entrevé que el experimentador determinó *n* siguiendo el mismo camino que ella, pero sin comprender la necesidad de la inversión y admitiendo una convergencia fortuita aunque se pase de *n* a *n'* por una vía puramente aditiva (+ 2, etc): ''¿Puedo saber cuál es la cifra que anotaste en un círculo? — *No, porque no se la dijeron y usted no me vio escribir.* — ¿Es cuatro? — *Sí* (asombro). — ¿Cómo hice? — *Porque le dijeron el conjunto* (total). — ¿Y entonces? — *Nuestro primer conjunto es 2 +* [4], eso da 6, etcétera. — ¿Entonces? — *Quizás usted tiene los sub-conjuntos en la cabeza y tuvo las mismas ideas de cifras que yo''.*

En lo que concierne al hongo, estos sujetos tienen clara conciencia del orden necesario para la construcción, así como de la inversión de sentido que interviene en el momento de su desarmado; entonces los trozos son ''colocados al revés'' como dice Eli, pero sin admitir, no obstante, que el orden directo y el inverso tengan un parentesco operatorio: no se parecen, dice Eli o ''no tanto'' (Set), lo que quiere decir, sin duda, que todavía no hay reversibilidad, en el sentido de una identidad entre el orden $A \rightarrow X$ y el orden $X \rightarrow A$, aparte de la dirección; estas reacciones permanecen en el nivel de la ''invertibilidad''. En cuanto a la comparación con la ausencia de orden obligatorio en ocasión de la construcción del cubo, es inmediatamente correcta.

Ahora bien: en el terreno de la adición numérica de los cuadrados, lo sorprendente es el hecho de que los sujetos, después de haber pasado de *n* a *n'* por medio de ciertas operaciones, no adviertan la posibilidad, de volver de *n'* a *n*, invirtiendo el sentido de las adiciones ni siquiera refiriéndose al camino recorrido, y ese punto es esencial. El sujeto San, el que está más cerca de apelar a ese trayecto, no encuentra en él apoyo indispensable, ni incluso útil (aunque se hayan hecho explícitas verbalmente las operaciones + 2, etcétera, una por una, y sólo faltase hallar el número inicial *n*), sino que solamente se ve en ello una nueva coincidencia: ''quizás usted tuvo las mismas ideas de cifras que yo''. Una característica notable de estas respuestas es, en particular, que para volver de *n'* a *n* estos sujetos no creen, salvo San (que por tanto se acerca al nivel IIA) que sea necesario conocer el número terminal *n'*: Eli, aún cuando nota: ''usted sabía que yo tenía diecinueve (en total)'',

supone que eso no sirve para nada. Set, que concede que "eso puede servir", atribuye el descubrimiento de *n* sólo a la suerte: "Usted adivinó". Es esta última respuesta la que en realidad corresponde a la creencia general, incluso en San. Aún cuando se le muestra al sujeto el detalle de las operaciones inversas, eso no sirve para nada: Eli, al comprobar que se quita 5 donde se habían agregado + 5, llega entonces a imitar la operación final ("como usted agregó tres, se los retira"), pero cuando se le pregunta por qué restar esos tres cuadrados, confiesa "mucho no lo sé". Lar sólo ve el azar en la solución de esas inversiones y niega que ello lo instruya acerca del método adoptado en realidad.

En una palabra: ni la inversión de las operaciones ni el conocimiento de *n'*, ni aún el recuerdo del camino recorrido de *n* a *n'* son invocados por los sujetos para comprender cómo se puede hallar *n:* desde su punto de vista no existe aún ninguna relación entre una sucesión ordenada de acciones (hongo) y una sucesión de operaciones aditivas, cuando se agregan cantidades entre sí (incluso encarnadas en los cuadrados) y ya no objetos individuales. Sin duda, la razón es, precisamente, que tales cuadrados enumerados constituyen conjuntos cuantificados, que las operaciones modifican incesantemente, y no unidades cualitativas que permanezcan estables una vez que se las coloca o se las agrega: ahora bien, a pesar de su lenguaje escolar de "conjuntos" e incluso "subconjuntos" (San), no están en un nivel de cuantificación operatoria.

§ 2 | EL NIVEL IIA. — En cambio, los sujetos de 7;6 a 8 y 9 años comprenden la necesidad de partir de *n'* para hallar *n*, y de proceder por operaciones inversas; pero todavía no ven, o no lo ven inmediatamente, que éstas no son conmutativas, dicho de otro modo, que es necesario mantener el orden invirtiéndolo:

MAR (7;6) comienza dudando de que se pueda hallar *n*: "*No...* (o bien) *usted me dice un número y puede estar bien* (por azar)". Pero cuando se le indica "veinticuatro" después que anunció cincuentainueve (*n'* en cifras sin las tarjetas), comprende enseguida: "¿Me ayudó que dijeras cincuentainueve? — *Sí.* — ¿Cómo? — *Usted lo hizo en el sentido contrario*". Retoma entonces su hoja y, mirando sus cálculos, hace las operaciones inversas, lo cual equivale a conservar el orden sin intención. Pero la inversión es claramente comprendida: "*una suma es lo contrario a una resta*".

JEA (8;2): "¿Crees que puedo llegar a saber cuál es el número que pusiste en un círculo? — *Sí* — ¿Cómo? — *Quitando cada vez el número que hallé*". Pero para reconstruir el camino seguido (que era de 27 a 65) indica 65 - 30 = 35; 35 - 3 = 32 y 32 - 5 = 27, lo cual conduce a 27, pero solamente por el hecho de que Jéa lo quita 30 a 65 y no a 60 (y no divide 65 por 2). En el caso del hongo, al que llama "lámpara", Jéa indica el orden necesario de la construcción, y también el del desarmado, mostrando los trozos uno a uno de arriba hacia abajo: "¿Es parecido construir la lámpara y deshacerla? — *Sí, porque se ha ordenado de modo similar*". ¿Existen varios modos de construirla y de deshacerla? — *Sólo hay uno en cada caso.* — ¿Se parecen? — "*Sí*". En cambio, la diferencia con los cubos radica en que "*se los puede ordenar de cualquier modo*".

TIE (8;4) para el cálculo efectúa correctamente las restas: "Sumar y restar, ¿se parecen? — *Sí, es menos y más: menos es lo que se quita y más lo que se agrega*".

Hay, pues, coincidencia de la identidad de la operación a pesar de la inversión de la dirección. En el caso de los cubos y los hongos: ¿Es lo mismo o hay diferencias? — *Hay diferencias; al hongo hay que ponerlo a lo largo... hay que disponerlo en un orden, el cubo no*".

BRU (8;7) del mismo modo, después de haber dudado en cuanto a la posibilidad de descubrir *n*, comprende en seguida que el acierto se debe a la inversión. Para (26 + 3) x 2 + 5 = 63, dice así: "*a 63 usted le quitó... se dice 63 y quitando los números se puede llegar a 26*". Pero su reconstitución sigue el orden directo: - 5, : 2 y - 5, lo cual no conduce a 26. Cuando se le muestra cómo se hace, ve entonces la analogía con el hongo, salvo que "*en lugar de poner rollos se ponen multiplicaciones y adiciones*" y concluye entonces, en relación con la sucesión ordenada de las operaciones: "*Creo que hay sólo una*". En efecto, en una nueva prueba invierte el orden correctamente.

GOU (8;6) piensa que se puede determinar *n*, pero no sabe cómo: "¿Me sirvió que tú me dijeras 39 (= *n*')? — *Sí, porque usted multiplicó y sumó* (por tanto, rehizo el camino). — ¿Cómo? — *Usted quitó*". Intenta entonces la reconstrucción, pero sin seguir el orden.

GOL (8;0), por el contrario, sigue el orden correcto desde el comienzo: "¿Es necesario poner las operaciones en orden o no? — *Creo, no estoy seguro*" Comparando sus operaciones con las del experimentador (escritas también en una hoja), dice: "*Usted comenzó por el final y terminó por el comienzo*"; pero, piensa, no obstante, que hubiera podido comenzar por -3 y terminar - 5 (*n* era 22 y *n*' 55). Hace un intento y concluye: "*No, es obligatorio hacerlo así* (orden inverso)". "Una resta - 2 y una suma + 2, ¿se parecen? — *Un poco pero con menos hay que quitar y con más hay que poner: es lo contrario*". Del mismo modo, para construir el hongo hay "*un solo*" orden posible, y para deshacerlo, "*el inverso*".

LAU (8;3): "¿Cómo lo pude descubrir?" — *Porque yo le dije 107* (= *n*'). *Usted marca los números que necesita para llegar a 107*". Parece, pues, no tomar conciencia de la inversión, pero en realidad agrega: "*Usted hizo así*" siguiendo en su hoja de operaciones los resultados de abajo hacia arriba, es decir, en el orden inverso, que conduce desde el final al comienzo. "¿Se los puede hacer en cualquier orden? — *No sé*". No ve entonces la analogía con el problema del hongo donde "lo importante" — *Es poner en orden*".

LUC (9;6) piensa que para hallar *n* "*las sumas que usted me dio, las calcula hasta* (*n*')". "¿Crees que hice como tú? — *Sí, pero sólo que al revés*". En realidad, para mostrarlo no sigue el orden y comienza por "la mitad de 55 (= *n*')". ¿Hay varios modos de hacerlo o uno solo?; — *Creo que hay uno solo.* — ¿Seguro? — *Se puede comenzar por la división o por la resta*", pero "*hay que hacer dos restas*". En cambio, en ocasión de la comparación del hongo y los cálculos se muestra más vacilante: "En el caso de los números, ¿se pueden hacer las operaciones en cualquier orden? — *En el mismo orden.* — ¿Seguro? — *No sé.* — ¿Y para la lámpara? — *Sí*".

Es sorprendente comprobar que la inversión de las operaciones, tan clara para todos los sujetos, sólo es comprendida de ese modo en los comienzos del estadio II, a la edad de 7-8 años siempre reconocida en lo referente al descubrimiento de la reversibilidad. En efecto: Al comprobar estas reacciones con las reacciones del nivel IB, puramente negativas a este respecto, se advierte

la unanimidad de las afirmaciones: "Usted lo hizo en sentido contrario" (Mar, de 7;6), "Usted quitó" (Bru, Gou), "Usted comenzó por el final y terminó por el comienzo" (Gol, tal como lo hace Lau pero sin decirlo). Usted calculó "al revés" (Luc), etcétera. De tal modo cada uno de los sujetos considera necesario conocer el número terminal *n'* para hallar *n*, y tras las dudas iniciales todos reconocen que se puede reconstituir deductivamente ese numero inicial *n*, y ello aunque se trate de números sin objetos y no de cuadrados.

Pero queda por explicar la formación de esta reversibilidad, así como las lagunas de este nivel IIA en lo que concierne al orden necesario de las operaciones inversas. Se responderá quizás, al primero de estos problemas, que todo esto es cuestión de conocimientos escolares: habiendo aprendido las sumas y las restas, los sujetos estarán informados, por la enseñanza, en cuanto a que las segundas son "lo contrario" de las primeras, como lo dice explícitamente Mar. Sólo los niños del nivel IB pueden también contar, "hacer conjuntos", y Eli, de 6;6, puede hablar perfectamente de "agregar" y "retirar". Si bien la formación escolar cumple un papel innegable, hay otros factores en juego, y el problema capital consiste en explicar por qué, cuando se trata de determinar *n* a partir de *n'* los sujetos del subestadio IB no piensan en el camino recorrido de *n* a *n'*, mientras que los del subestadio IIA se ocupan de eso inmediatamente, considerándolo el punto esencial.

Ahora bien: hay en ello una razón fundamental que interesa de cerca a la abstracción reflexionante. Toda acción y, *a fortiori*, toda sucesión de acciones, se aleja, en efecto, de su punto de partida por el hecho mismo de que se acerca al punto de llegada. Ahora bien: al centrarse la toma de conciencia inicial de las conductas en sus fines o resultados, y al ser el carácter general de las representaciones elementales el de insistir en los aspectos positivos de los objetos o los acontecimientos, y descuidar sus aspectos negativos (*x "no es"* a, b, etc.), es obvio que la abstracción se refiere, en principio, a la terminación de las secuencias y no a su punto de arranque o a su desarrollo. Desde el punto de vista espacial esto es tan verdadero que hasta los 8-9 años la longitud de los caminos es evaluada por el orden de los puntos de llegada (convergencias o adelantamientos) sin ocuparse de los puntos de partida. En el presente caso de las operaciones que conducen de *n* a *n'*, los sujetos del nivel IB, sólo piensan en las (pre) operaciones directas, de "agregar" de a poco, pero olvidándose de lo que precede y sin conciencia de una coordinación, o sea, de un camino recorrido a partir de *n*. Por tanto, a pesar de las apariencias, es necesaria una real abstracción reflexionante y más difícil de lo que se podría creer para concebir *n'* como vinculado a *n* por un trayecto operatorio de conjunto. Este es fácil de concebir en el caso del hongo, donde el sistema forma un todo perceptivo que ordena la superposición de los trozos, los cuales permanecen invariables, pero cuando se trata de conjuntos (de cuadrados o de simples unidades) y de sus transformaciones sucesivas($n + 3$..., etc. $\rightarrow n'$) no basta con considerar las que pueden observarse para arribar a la noción de un camino total constituido por coordinaciones; de ahí la necesidad de una abstracción reflexionante.

Al ser así, de ello resulta, primero, la comprensión del lazo entre *n* y *n'*, y por tanto la necesidad de conocer *n'*. A menudo viene después, la idea inicial de que el experimentador simplemente ha procedido como el sujeto: "Usted

multiplicó y sumó'' (Gou), ''Usted señala los números que necesita para llegar a n' ''(Lau), ''Las sumas, usted las calcula hasta n' '' (Luc de 9;6). Pero como el camino operatorio forma en lo sucesivo un todo que se apoya en la compensación de sus aspectos positivos y negativos (acercarse al término = alejarse del punto de partida), es fácil completar entonces esta primera abstracción reflexionante mediante otra muy cercana: ''Usted comenzó por el final y terminó por el comienzo'' (Gol), o: ''Usted hizo como yo'' pero sólo que al revés (Luc). De donde, finalmente la abstracción de la operación inversa bajo una forma más general: ''Usted quitó'' (Jéa, Bru, etc.) o ''Usted lo hizo en el sentido contrario'' (Mar).

Pero por qué entonces las dificultades para comprender que el orden es necesario simplemente por el hecho de que en el nivel IIA la adición ya se comprende como conmutativa pero que, como vimos en el cápitulo II, la multiplicación es una composición operatoria más difícil de captar por ser ya una operación de rango superior efectuada sobre las operaciones aditivas elementales. Además, como la única multiplicación invocada aquí es una duplicación, el sujeto no tiene el sentimiento de salir del dominio de las adiciones, porque $2x = x + x$.

§ 3 | LOS NIVELES IIB Y III. — El nivel IIB se caracteriza por la comprensión de un orden necesario, pero sin que todavía el sujeto esté seguro de antemano de la posibilidad de determinar n, es decir, como en el nivel IIA sin anticipar todavía deductivamente el camino de n' a n, comprendido, empero, inmediatamente por la reconstrucción inferencial desde el primer ensayo:

STA (8;6) pasa de 12 a 35: ''¿Crees que puedo saber cuál es el número que pusiste en un círculo? — *Sí.* — ¿Cómo? — *Usted adivina.* ¿Pero para determinarlo con seguridad? — *No sé.* — Mira (12). ¿Cómo lo hice? — *35 — 5 = 30; 30 : 2 = 15 ; 15 — 3 = 12: hay que hacer dos restas y una división.* — ¿Se puede comenzar por cualquier operación? — *No, hay que comenzar por la resta* (de 5), *después la división, de otro modo no saldría bien*''. Y también: ''*Hay sólo un orden... para construir el hongo había que ponerlo en orden y para hallar 12 había que poner las cifras en orden, no, los números.*''

FRA (9;1) ''¿Crees que puedo determinar n? — *No.* — ¿Existe algún modo? — *No.* — ¿Es 72? — *Sí* — ¿Cómo hice? — *Una división. Usted hizo 155 — 5 = 150; después 150 : 2 = 75 y a 75 le quitó 3 y tuvo 72.* — ¿Podría haber comenzado por cualquier operación? — *No lo creo, porque si usted hubiese hecho 155 — 3 = 152, dividido por 2 da 76, menos 5 = 71! Usted tuvo que hacerlo en el orden correcto... Hay que ponerlos en el orden inverso al que se había hecho y realizar las operaciones contrarias.*'' A continuación dice que no se parece al problema del hongo, porque '' *hubiera podido poner sobre el hongo la cantidad* (de trozos) *que quería''*; sin embargo, ''*se parecen porque para hallar cómo establecía el orden del hongo usted debió* (deshacerlo) *en otro orden... pero allá* (cálculo) *usted inventó las operaciones y para el hongo* (solamente) *invirtió el orden de los trozos*''. En el caso del cubo, no hay orden necesario, ''*porque todas las formas son similares*''. Se lo reemplaza por una cuadrícula con números y se pregunta si se puede cambiar el orden para pasar de 40 a 32: ''*Se puede, quizás, pues se trata siempre de adiciones. Para las divisiones y multiplicaciones hay que hacer lo contrario* (= seguir el orden inverso) *y aquí no hay divisiones* (mezcladas con restas).''

Como vemos, a partir del nivel IIB se comprende todo, pero el hecho curioso es que esa comprensión, que es inmediata desde el primer intento, no

está acompañada todavía de una previsión del método por seguir, y ni siquiera de la posibilidad de hallar *n*. Para ello sólo vemos una explicación: La abstracción reflexionante descrita en § 2 para dar cuenta de la formación de las inversiones operatorias necesita todavía, en el nivel de las operaciones "concretas", una abstracción pseudoempírica, es decir, la reflexión sobre objetos reales o sobre un ejemplo particular que, aunque construido enteramente por las operaciones de un sujeto, dé lugar a comprobaciones, como si se tratara de una lectura física. En el presente caso, el niño que primero duda de que se pueda hallar *n* por no haberlo hecho él mismo, tiene necesidad de comprobar que acertó para reconstruir el proceso, aunque esta reconstrucción no le plantee ningún problema; pero, al no haber llegado aún al nivel de las operaciones hipotético-deductivas, no podía hacerlo explícito en abstracto como simplemente "posible", antes de verificar a través de los hechos que podía ser real. Es éste un hermoso ejemplo, no sólo de las diferencias entre operaciones "concretas" y formales, sino también de la manera en que las construcciones de un nivel determinado consisten en actualizar o realizar las nuevas posibilidades abiertas por las elaboraciones del nivel precedente: en efecto, desde el estadio III hay anticipación de la reconstrucción deductiva de *n*, y no solamente reconstrucción después de comprobar el acierto:

ERI (10;6) está todavía en una situación intermedia entre los niveles IIB y III: "¿Crees que se puede hallar *n*? — *Sí, haciendo a la inversa: restar, dividir, restar*", e indica correctamente los cálculos, pero aún no está seguro de que ocurra siempre así: "*Algunas veces sí, otras no.* — ¿Y se puede cambiar el orden de las operaciones? — *No, la del medio es diferente de las otras dos*".

BAR (11;1) "¿Se puede hallar *n*? — *No, ¡sí, sí! Volviendo a hacer las operaciones inversas*". Después de tener dudas en cuanto al orden, Bar reconoce que es necesario: "*Es como una cuenta al revés*"; y, en la comparación con el hongo: "*Sí, es similar, no hay dos maneras de construirlo y hallar 42 a partir de 95*", mientras que en el caso del cubo y de las adiciones solas: "*Se llega al mismo resultado con un orden o sin él.*"

Cuando se les presenta a estos sujetos (como, por otra parte, desde el nivel IIB) series de operaciones, ya sean puramente aditivas, o heterogéneas, distinguen enseguida aquéllas cuya inversión conserva el orden "como una cuenta al revés", de las otras. Los modelos inventados por los sujetos no nos enseñan nada más.

§ 4 | CONCLUSIONES. — Los hechos que preceden nos ponen en presencia de una serie ininterrumpida de abstracciones entre las que pueden distinguirse las siguientes formas:

1) En primer lugar, está la abstracción del orden, en el montaje del hongo, aún no alcanzada en el nivel IA, donde el sujeto se limita, a apilar de cualquier manera, sin mantener la correspondencia entre las superficies de sección de los trozos. Esta consideración de los puntos de contacto y su verificación dependen, naturalmente, de abstracciones empíricas, pero subordinadas a un plan general de seriación por superposiciones, que exige una coordinación de las acciones. Es de esta coordinación de acciones, a la vez sucesivas e interdependientes, de donde se abstrae a continuación la noción de un orden

necesario que se impone desde el nivel IB en lo que respecta al hongo. Pero esta abstracción "reflexionante" sólo es, pues, accesible gracias a una facilitación que explica su precocidad en el caso particular: poder comprobar mediante una abstracción "pseudoempírica" el orden introducido en el seno de las partes del hongo por la acción ordenadora —es decir, "leer" en los objetos el resultado del encadenamiento serial— es mucho más fácil que tomar conciencia de las etapas sucesivas y de las exigencias de ese proceso en tanto tal. En efecto: al ser el hongo un objeto cuya forma total es conocida, erguido verticalmente y cuyas partes permanecen inmóviles, la lectura pseudoempírica del orden se da perceptivamente del modo más simple por la oposición de una sucesión de movimientos o de operaciones cuya estructura general exige, para ser reconocida, una reconstrucción. Esta unión de las abstracciones reflexionante y pseudoempírica torna inmediata una abstracción "reflexionada" que se traduce en una buena descripción consciente y verbal del orden y, sobre todo, en la comprensión y el enunciado explícito de su carácter obligatorio.

2) Un segundo complejo de abstracciones parecido al precedente interviene en el momento en que se desarma el hongo y se toma conciencia del orden que necesariamente se ha seguido en ocasión de ese desmembramiento. No vale la pena volver a ello, porque las diversas fases precedentes se encuentran aquí.

3) Por el contrario, la comparación de los órdenes directo e inverso, es decir, la abstracción "reflexionada" de la reversibilidad, plantea un problema, pues una acción invertida no es, como lo es una operación inversa, la misma operación que la transformación directa pero en sentido opuesto: es otra acción, cualitativamente diferente, tal como desvestirse en relación con vestirse; ahora bien: en este plano de los hábitos, se sabe que la capacidad de escribir de izquierda a derecha no implica sin más la de hacer lo contrario. Por tanto, no hay que asombrarse si en el nivel IB los sujetos no ven semejanza alguna entre los dos órdenes de sucesión, aún cuando como Eli, dicen que los trozos desarmados están "puestos al revés", mientras que en el nivel IIA los sujetos indican la correspondencia (véase Jéa en el § 2), incluso cuando dicen que no es lo mismo (en el sentido de que no es idéntico) porque "es lo contrario". Lo esencial es que la simetría afirmada entre las operaciones directas e inversas se convierte, en el nivel IIA, en un medidor positivo, y no en un argumento para afirmar la heterogeneidad. Ahora bien: esta comparación, efectuada con acierto en el nivel IIA, constituye una abstracción reflexionada de segundo grado, o reflexión sobre las reflexiones de formas 1 y 2. Es interesante notar que cuando estudiemos la abstracción del orden a partir de acciones más simples, como vestir o desvestir una muñeca y hacer o deshacer una torre (cap. X, sección II), así como la estructura común de "hacer" y "deshacer", sólo se extrae a partir del nivel IIa.

4) Una abstracción instructiva es la de la ausencia de orden en la construcción del cubo grande, a la que naturalmente no se llega en el nivel IA porque aún no se ha efectuado acertadamente el montaje del hongo, pero se hace

explícita con mucha claridad a partir del nivel IB: "Sólo hay que apilar" los cubos pequeños de cualquier modo, piensa Eli, y "Hay varias maneras" de llegar a ello, precisa Set. En extensión habría, pues, tres clases: *B*, la de las construcciones por acciones sucesivas; *A*, con orden necesario, y *A'* (= *B* — *A*), sin orden necesario. Pero en el nivel IB el sujeto evita estas negaciones y utiliza el lenguaje de las diferencias en comprensión: "prestar atención al orden" (*A*) o "simplemente apilar" (*A'*), o aún "una sola manera (*A*) o "varias maneras" (*A'*). En este caso es suficiente una abstracción reflexionante bastante elemental para tomar conciencia de la diferencia cualitativa de las acciones y traducirlo en abstracción reflexionada.

5) La comparación entre las situaciones 1 y 2 (hongo) y el caso 4 (construcción de un cubo sin orden necesario, al igual que su desmembramiento) plantea, en cambio, un problema interesante que volveremos a encontrar a menudo a propósito del subestadio IB. Cuando les pedimos a los sujetos de este nivel que comparen los dos tipos de pruebas de las que pueden hacer muy bien una descripción e incluso cierto análisis de las soluciones halladas considerándolas separadamente, no llegan a vincularlos desde el punto de vista de sus formas comunes o parcialmente diferentes: sin embargo, llegan con frecuencia a establecer una correspondencia detallada entre los objetos manipulados y hasta entre las acciones ejercidas sobre ellos, pero, en lo que concierne a la comparación como tal, no hablan más que de los contenidos y no extraen las formas. Eli, por ejemplo, cuando se trata de las facilidades relativas, describe muy bien la ausencia de orden en el caso de los cubos, pero cuando se le pregunta qué es similar y qué diferente, ella sólo atina a decir que "el final (la parte superior) de la lámpara, no es cuadrado". Set es muy consciente de la diferencia entre el orden necesario y el orden arbitrario, pero respecto del problema de la comparación como tal, sólo descubre como diferencia que "no son la misma cosa" y que "los cubos son más livianos". Rol, de 7;0, invoca las diferencias de color y la presencia de un eje en el hongo; Lar 7;0 dice que no se puede hacer una pirámide con los cubos; en síntesis, todos piensan, pues, en los contenidos y descuidan la forma de las acciones. Hay allí un problema, porque en el fondo, (orden necesario o arbitrario) tienen opiniones muy correctas: en realidad lo que se les pide con la comparación es una reflexión sobre las reflexiones, y, por tanto, una abstracción reflexionada de nivel superior; de ahí que su construcción se retrase hasta el nivel IIA. En efecto: las respuestas de este nivel centran inmediatamente la comparación en la forma, o sea en la cuestión del orden, lo cual significa que saben extraer, por medio de una nueva abstracción, las relaciones estructurales entre las abstracciones 1 y 4.

6) En cuanto a la abstracción del camino recorrido por los cálculos de *n* a *n'* y su importancia para hallar *n*, es mucho más compleja que las del orden 1 o de la falta de orden necesario 4, y se aproxima más a las reflexiones sobre reflexiones que intervienen en las comparaciones 3 y 5. En efecto: para el sujeto se trata, en primer término, de reconstruir el orden de sus propias acciones, lo cual constituye una abstracción reflexionante a partir de su coordinación, y

que apunta a una abstracción reflexionada (*). Además, sin conocer el trayecto seguido por el experimentador, hay que comprender también que existe una relación entre esos dos itinerarios, esto es, que es posible una comparación (en su forma más simple la comparación hace que el sujeto crea que las operaciones de su compañero fueron las mismas que las suyas): hay, por tanto, una abstracción a la segunda potencia, como en 4 y 5, que, además, se constituye en el mismo nivel IIA.

7) Pero interviene más aún en el descubrimiento del hecho de que el conocimiento del número terminal *n'* es necesario para determinar el número inicial *n*: hay en efecto, allí algo más que una comprobación, incluso pseudoempírica, o una simple reconstitución, porque se trata de una inferencia basada en una razón concebida como necesaria. La abstracción no se refiere solamente a la coordinación de las acciones del sujeto ni a su posible comparación con las del experimentador, sino a la idea más general de que todo camino es función *a la vez* de su punto de partida y de su punto de llegada. Ahora bien: se sabe (por las experiencias acerca de la conservación de las longitudes, etc.) hasta qué punto es tardío el reconocimiento de esta doble condición: hay que admitir, por tanto, que este lazo entre *n* y *n'* es el resultado de una abstracción reflexionante de jerarquía superior, que concerniente a las razones necesarias (lo cual, por lo demás, se produce desde el nivel IIA en lo que se refiere a las relaciones lógicas elementales como la transitividad, etc.), y no sólo a los procesos.

8) La abstracción del camino recorrido y la del lazo entre *n* y *n'*, conducen entonces a una nueva abstracción reflexionante: la de la inversión de sentido de las operaciones que conducen de *n* a *n'* y de *n'* a *n*, y, por tanto, de la inversión de las sumas en restas. Ahora bien: hay allí una abstracción nueva y fundamental, que apunta al redescubrimiento (en cada generación de sujetos individuales) de la reversibilidad, no ya como acciones sucesivas y diferentes, sino en tanto operaciones idénticas o solidarias que se distinguen sólo por la dirección: cuando Tié (8;4 § 2) dice que la suma y la resta se parecen porque "es menos y más: menos es lo que se quita y más lo que se agrega", comprende de modo explícito que las dos consisten, de modo idéntico, en un desplazamiento de las unidades, pero en el sentido → *A* si se las une a *A*, y en el sentido contrario ←A si se las separa de ella. Por tanto, además de la abstracción reflexionante que conduce a invertir las operaciones del experimentador en relación con las del sujeto, hay allí una abstracción reflexionada

(*)Como las acciones del niño son impuestas por la consigna y el sujeto registra sus cálculos en una hoja de papel, probablemente se afirme que la única abstracción en juego para extraer el camino recorrido de *n* a *n'* es una abstracción pseudoempírica por comprobación de los resultados, y no una abstracción reflexionante a partir de la coordinación de las operaciones. Pero, como ya se dijo en § 2, los sujetos del nivel IB se hallan en situación aún más favorable porque sólo tienen que poner y agregar cuadrados que permanecen delante de ellos y cuya enumeración no presenta ningún problema: en modo alguno efectúan una abstracción del trayecto de *n* a *n'*, como tal, ni aun en su forma pseudoempírica. Nos parece, por tanto, evidente que el progreso de los sujetos del nivel IIA consiste en remontar los resultados observables a la coordinación misma de los actos sucesivos, y se vio en el § 2 por qué esta abstracción, tan elemental en apariencia, es en realidad muy compleja.

que se refiere a la comparación de esas operaciones de dirección contraria en su forma más general.

9) En cuanto a la abstracción del orden necesario en una serie de operaciones en la que se combina una multiplicación con adiciones, en oposición con la conmutatividad de las adiciones entre sí, sólo aparece en el nivel IIB, y todavía en general (como, por otra parte, en los adultos no dedicados a las matemáticas), bajo la forma de una abstracción pseudoempírica, es decir, que se limita, en primer lugar, a comprobar que es así cuando se prueba con los ejemplos. Sólo por una abstracción de jerarquía superior se descubre (eventualmente) la razón.

10) Esta reflexión de nivel superior culmina, en el estadio III, con un comienzo de pensamiento reflexivo que permite al sujeto resolver enteramente el problema (en lo que concierne al camino, la inversión de las operaciones y la del orden como tal) por vía exclusivamente deductiva, es decir, con anticipación y no sólo en vista de los resultados del experimentador. Lo que hasta aquí no era otra cosa que reconstituciones sucesivas y, por lo tanto, retroactivas, se coordina así en un sistema único de inferencias proactivas.

11) En el mismo nivel III se torna posible también la comparación, por abstracción "reflexionada", de la construcción del hongo y del cálculo que conduce a n a n' con su orden necesario (pero descubierto sólo en el nivel IIB): "Sí, es similar —dice así Bru de 11;0—, no hay dos maneras de construir el hongo y de hallar n a partir de n' ", y Ala: "Es parecido armarlo y desarmarlo; para armarlo es el número n (que corresponde al primer trozo puesto) y para desarmarlo se parte del número n' como de arriba hacia abajo (en el caso del hongo)."

12) Por último, también en este nivel parece fácil la comparación general de las tres pruebas precedentes, así como de las series de cualesquiera operaciones presentadas al sujeto: a las series de las sumas y restas, y sólo a ellas, corresponde la construcción del cubo, mientras que el armado del hongo corresponde a operaciones heterogéneas. Entonces hay una explicación clara, por medio del pensamiento reflexivo, de los rasgos comunes y de las diferencias entre los dos tipos de estructura.

Vemos, en definitiva, hasta qué punto son variadas, y cada vez más complejas, las diversas formas de abstracción en juego en la solución de esos pequeños problemas; ello demuestra una vez más que la abstracción reflexionante no es una entidad estática, sino que evoluciona sin cesar, lo mismo que sus subvariedades pseudoempíricas y reflexionadas.

CAPÍTULO IV

Abstracción y generalización en las transferencias de unidades

EN COLABORACIÓN CON P. MOESSINGER

Existe probablemente entre la abstracción y la generalización una relación circular análoga a la de tantas otras parejas en las que cada uno de los términos remite al otro (concepto y juicio, comprensión y extensión, orden y suma en lo finito, etc.). En efecto: el resultado de una abstracción reflexionante es siempre una generalización, y el de una abstracción empírica conduce a precisar el grado de generalidad de las características extraídas del objeto. Recíprocamente, toda generalización supone una abstracción previa o, al menos, la delimitación de las propiedades generalizadas. Pero si esta relación circular parece verdadera en grandes rasgos, subsiste una serie de problemas de detalle según los tipos de abstracción y de generalización posibles. Si se consideran sólo sus dos formas principales, está claro, en primer lugar, que al proceder la abstracción empírica, sólo por disociación de características ya dadas en el objeto, la generalización que resulta de ella sólo puede ser inductiva y desprovista de necesidad, mientras que, al consistir la abstracción reflexionante, en un reflejamiento de coordinaciones que implican ya una construcción, la reflexión reorganizadora que resulta de ella conduce a generalizaciones necesarias. ¿Pero en qué consiste esa necesidad y, sobre todo, qué pasará en el nivel de las abstracciones pseudoempíricas, es decir, cuando la información es extraída de una lectura de los objetos, pero considerando las propiedades introducidas en ellos por las acciones u operaciones previas del sujeto?

Para analizar estas situaciones, hemos retomado bajo nuevas formas el problema, ya estudiado, de la diferencia de *2n*, entre dos colecciones, *A* y *B*, que resulta del hecho de haber transferido *n* elementos de *A* a *B*. En primer

lugar preguntaremos cuánto se desplaza el medio de un hilera de fichas cuando se agregan a ella *x* unidades: es, pues, el mismo problema pero con los términos invertidos (hallar la mitad y no el doble). Le agregaremos un problema de votos: si en una votación se tienen *n* "si" y *n'* "no" ($n' > n$), ¿cuántos votantes deben cambiar su "no" por "si" para llegar a ser la mayoría? Por último, para circunscribir un poco más los problemas de necesidad, agregamos una variante del "juego de Nim": dos jugadores ponen de uno en vez 1 ó 2 fichas, y el que ha puesto la cuarta (los dos juegos reunidos) gana la partida. ¿Cuáles son entonces las condiciones necesarias y suficientes para ganar?

La técnica adoptada para el primero de estos problemas consiste en primer lugar en presentar hileras cortas (2 ó 4) de fichas pidiéndole al niño que ponga un fósforo en el medio: de ahí el dispositivo inicial que notaremos 1/1 o 2/2, etc. Siguen dos tipos de problemas según la modificación introducida sea directa (= *m.d.*) o inversa (*m. i.*). En *m.d.* el experimentador dice "agrego 2 (ó 4, etc.)", y alarga la hilera hacia la izquierda o hacia la derecha con 2 ó 4 elementos: el niño debe entonces "mover" el fósforo para ubicarlo en el medio, y se le pide al sujeto que prevea y, después, que determine cuántas fichas hay que desplazarlo. En *m.i.*, es el experimentador quien desplaza el fósforo, y se le pregunta al niño cuánto hay que alargar la hilera para que el fósforo permanezca en el medio. Se continúa alargando de tal manera con la misma cantidad *n* (p. ej. 2) de hileras de 2, 4, 6, etc. elementos, y diremos que hay "generalización I" cuando el sujeto prevé que el alargamiento será siempre de *n* (incluido el caso de las hileras "muy largas", respecto del cual es importante preguntar). Se pasa a continuación a alargamientos de 4, 6, etc., elementos, y diremos que hay "generalización II" cuando el niño prevé un desplazamiento correspondiente a 4/2, 6/2, etc. (o un alargamiento del doble en *m.i.*).

Para el problema de las votaciones, se imagina un proyecto de excursión escolar con consulta a los alumnos: 4 quieren ir a la montaña y 3 a un bosque: ¿cuántos deben cambiar su voto para que haya inversión de la mayoría? Después de este ejemplo preliminar donde basta con un solo votante, se pasa a 3 y 5, 2 y 7, etc, preguntando cada vez cuántos cambios son los suficientes; el problema no deja de ser muy concreto, porque los dos grupos de votantes están representados por fichas de distintos colores. Se pregunta también, para control, cuántos alumnos, enfermos durante la primera votación, deben volver y agregarse a la minoría para que ésta gane.

En cuanto al "juego de Nim", la variante adoptada consiste en que los dos jugadores (el niño y el experimentador) sólo tienen derecho a poner 1 ó 2 fichas, y el que pone la cuarta (de los dos conjuntos reunidos) gana. Se estudian las previsiones del sujeto y las leyes que él extrae de allí, con evaluación de las relaciones necesarias. Después se generaliza determinando que el ganador es el que pone la séptima ficha, o la décima, etc. Se trata, entre otras cosas, de comprender que el primero en jugar puede, con toda seguridad, ser el vencedor (excepto cuando la regla sea que gana quién pone la tercera ficha, de manera que el segundo jugador gana en todos los casos, ya ponga una o dos fichas).

§ 1 | EL DESPLAZAMIENTO DEL MEDIO DE LA HILERA. — En el nivel preoperatorio IA (todavía con varios casos de 7 años y a veces más) los sujetos no son capaces de ninguna generalización II, y ni siquiera I, y sólo proceden por simples comprobaciones y cuentas:

FRA (6;0) para *m. d.*, pone correctamente el fósforo en el medio de una serie de 4: "¿Cuántas hay en cada lado? — *Dos.* — Agrego dos. — (Llega por tanteos a 3 y 3). —

Agrego dos. — (Vuelve a poner el fósforo después de 3). — ¿Hay lo mismo de cada lado? — (Cuenta y pone el fósforo después de 4) — Agrego dos. — (Vuelve a contar). "Se comienza nuevamente de 1/1. Agrego dos. — (Llega empíricamente). — Y dos más. — (vuelve a contar)." Se le muestra entonces una hilera de 10 fichas pero apretadas en el lado izquierdo y espaciadas en el derecho: pone el fósforo en la mitad del largo total y no entre 5 y 5 elementos.

FIL (5;8) para *m.i.* sin haber pasado por *m.d.* "(dos y dos con fósforo ubicado). ¿Cuánto hay de cada lado? — *Dos y dos.* — Y ahora, ¿si desplazo el fósforo aquí? — *Tres y uno* (lectura). — ¿Y para que haya lo mismo de los dos lados? — (Agrega 3 fichas, de donde 3/1 + 3, un poco separados.) — ¿Cuánto hay aquí? — *Tres.* — ¿Y allá (a la derecha)? — *Cuatro.* — (Se vuelve a explicar y él pone 3 y 3 contando.) — ¿Y si desplazo el fósforo una ficha (4 y 2)? — (Cuenta los 4 y pone 4 a la derecha.) — Y si corro una (se la desplaza ante sus ojos y se tapa la hilera), ¿cuántos vas a agregar? — *No sé.* — (Se destapa la línea). — (Agregaré) *Uno.* Se vuelve a comenzar: cuenta y agrega. — "¿Antes habías agregado? — *Uno.* — ¿Y antes, cuando corrí uno? — *No sé.*"

Se debe notar, además, que esos sujetos quitan en general el fósforo antes de decidirse, después cuentan y lo vuelven a colocar.

En el nivel IB se asiste a un comienzo de generalización I (por lo tanto, de repetición de la solución hallada, con lo que queda atestiguado un sentimiento de regularidad empírica), pero ello sólo en el caso de un alargamiento de dos, y no para cantidades superiores cuando acaban de ser experimentadas. El criterio de esta generalización es la inmediatez de la respuesta, lo que excluye una enumeración; pero el sujeto sólo puede justificar su decisión contando después. Esta reacción IB fue obtenida, en un caso, a partir de 5;6 en relación con *m.d.*, pero no antes de los 7 años en *m.i.*:

PAO (6;1), (*) en el caso de las dos fichas (1/1): "Agrego dos fichas. — (Mueve el fósforo 1 pero declara): *Dos.* — Agrego dos más. — (Cuenta y mueve 1). — (Se da 5 y 5). Si pongo dos más ¿dónde vas a poner el fósforo? — (Mueve 2) ¿Está en el medio? — *Sí.* — Cuenta. — *Siete y cinco* (corre 1). — ¿Y si se agregan dos? — (Corre 1, pero esta vez sin contar). — ¿Cuánto moviste? — *Uno.* — ¿Por qué? —..." Mantiene dos veces seguidas esta reacción a pesar del alargamiento de la serie, pero no generaliza cuando se pasa a 4: desplaza entonces 3, después comprueba el error, corre 2, después vuelve a 3 y luego a 1. Hubo, entonces, generalización I para 2, pero no generalización II ni tampoco reproducción del desplazamiento de 2 para los alargamientos de 4 cuando ha verificado. Durante las pruebas *m.i.* Pao permanece en el estadio I, es decir, en la supuesta igualdad de los alargamientos de la serie y de los desplazamientos del fósforo (cf. Fil, al final).

PIE (7;6). Se parte de 2/2. "Si se agregan dos fichas? — (Corre 2.) — ¿Está bien así (4/2)? — *No* (agrega 3/3). — ¿Cuánto corriste el fósforo? — *Un lugar.* — *¿Y si* agrego dos? — *Corro uno.* — ¿Cómo lo sabes? — *Hay ocho (6 + 2), la mitad es 4.* — ¿Y si agrego dos? — *Corro un lugar* (sin contar). — ¿Siempre hay que correr uno? — *Sí*". Se pasa a un alargamiento de 4 y Pie encuentra empíricamente la solución: "*Corro dos lugares.* — ¿Si agrego cuatro más? — *Dos lugares.* — ¿Y si la serie se vuelve muy larga? — *Quizás tres.*" Para *m.i.*: "Corro el fósforo un lugar y tu agregas

(*) La notación 1/1 significa que hay una ficha a cada lado del fósforo, y, por lo tanto, dos fichas en total en el punto de partida.

las fichas. — *Pongo tres* (ensaya y corrige). — Vuelvo a mover uno — (Agrega dos)" y así tres veces más; después llega sin contar. "¿Y si la serie es muy larga y yo corro de a uno? —...— ¿Puedes saber?. — *Depende*".

Se advierte que esta generalización es modesta y sólo consiste en repetir para 2 en *m. d.* (o para el desplazamiento de 1 en *m.i.*), lo que se ha descubierto empíricamente mediante una cuenta. Sucede, incluso, sin que sea el caso de todos, que cuando el experimentador agrega sus fichas en la otra punta de la hilera, el sujeto renuncia a la generalización a causa de tal cambio de sentido.

Entre el nivel IB y el estadio II, donde las generalizaciones de tipo II ya resultan posibles, se encuentra un grupo numeroso de casos intermedios en los que la generalización de tipo I se aplica a los alargamientos de 2 y de 4 (y ya no solamente de 2), pero no a los números superiores (y ello en *m.i.* ante los desplazamientos de 1 y 2, así como en *m.d.* cuando se trata de traducir los alargamientos en desplazamientos).

GUI (7;0), partiendo de 2/2: "¿Si agrego dos fichas? — (Llega a 3/3.) — ¿Cuántas fichas moviste el fósforo? — ... — ¿Y si agrego dos más? — *Así* (4/4). — ¿Cuántas moviste? — (Cuenta.) *Una, para que de cuatro de los dos lados.* — ¿Y si agrego dos más? — *Corro una.* — ¿Por qué? — *Porque eso da cinco de los dos lados: había cuatro de cada lado, y si muevo uno hay cinco, y 3 + 2 = 5 de cada lado.* — ¿Y si se agregan dos más? — (Respuesta inmediata) — *Uno.* — ¿Y si se agregan cuatro? — (Corre el fósforo dos fichas.) *No, tres* (cuenta). *¡Ah no, dos!* (Se reparte 2/2.) ¿Si se agregan cuatro? *Corro dos más.* (pero todavía verifica).— ¿ Y si agrego cuatro más? — (Sin contar) *Corro dos más.* — ¿Y con cuatro más? — *Corro dos más.* — ¿Por qué? — *Hay que desplazar dos para que haya dos más de cada lado.* — ¿Y si agrego seis más? — *Hay que correr cuatro.* (Prueba, se corrige y corre 3). — ¿Y seis más? — *Corro tres.* — ¿Seguro? — *Sí.* — Y cuando la serie es más larga, ¿se corre más de tres o no? — *Sí* (más), *si se corre siempre de a tres, nunca da lo mismo*". Se pasa a *m.i.*: "Si corro el fósforo de a uno ¿cuántas fichas hay que agregar para que el fósforo esté en el centro? —*Hay que agregar dos.*— ¿Y si lo muevo un lugar más? — *Se ponen dos fichas.* —¿Y si continúo durante mucho tiempo? — *Se ponen siempre dos.* — ¿Y si muevo el fósforo de a dos lugares? — *Se ponen tres* (cuenta); *no, cuatro.* — ¿Y si corro de a dos? — *Se ponen cuatro.* — Y si la serie se torna muy larga, ¿hay que poner más? — *No.* — ¿Si corro tres lugares? — *Tengo que contar.*"

AMA (8;6). Las mismas reacciones para *m. d.* cuando llega a prever un desplazamiento de uno sin contar pero justificando la igualdad por una enumeración posterior; se le pregunta: "Uno de tus compañeros dice que si se agregan dos basta con correr uno: sin necesidad de contar. ¿Es difícil? — *No.* — ¿Por qué? — *No sé*". Se reinician las pruebas y generaliza sin dudar. "¿Entonces lo que decía tu compañero era cierto? — *¡Sí!* — ¿Por qué? — *No sé explicarlo.* — Otro compañero dice que cuando es muy largo hay que correr dos lugares. — *No, no es verdad* (sin dudar). — (2/2) Voy a agregar cuatro. — *Eso lo sé.* — ¿Qué? — *Hay que correr dos* (¡principio de generalización II!) — ¿Cómo lo sabes? — *Porque hay cuatro de cada lado* (2/2 + 4 = 8). — ¿Y si agrego cuatro más? — *¡... dos!* — ¿Y otra vez cuatro? — *Otra vez dos.* — (*Idem* tres veces). ¿Es siempre dos? — ¡Y bueno! (menos seguro que "sí") — ¿Por qué? — *Porque ahí hay cuatro.* — ¿Y así (10/10 + 4)? (Corre tres espacios) — ¿Por qué? — *Porque hay ocho de cada lado.* — ¡Pero no!" — (Corrige.)

DAN (8;10) en *m.d.* generaliza los desplazamientos de 1. "¿Por qué? — *Salta a la vista.* — Agrego cuatro. — (Corre dos lugares.) — ¿Por qué? — *Si usted pone dos yo*

salto uno, si usted pone cuatro, salto dos. — ¿Y si pongo seis? — *Eso dará cuatro: lo mismo de los dos lados.* — ¿Y si agrego ocho? — *Salto seis.* "

Cabe destacar estos hechos por la constitución de una cuasi-necesidad tal que el sujeto está seguro de una conclusión antes de comprender la razón (¡está seguro antes de saber!) y sin que esa deducción se reduzca a las generalizaciones empíricas de los niveles IA y IB. Volveremos a este tema en el § 4.

En el nivel IIA (con un caso fronterizo de 6;6 para *m. d.* y otros de 7:3 pero solamente a partir de 9;6 para *m. i.*) se caracteriza por la constitución de generalizaciones de tipo II pero con formas aún parciales (por ejemplo, acierto en 8 y fracaso en 6, etc.):

GAL (6;6) *m. d.*: "(2/2) Agrego dos fichas. — (Corre un lugar.) — ¿Cuánto? — *Uno.* — ¿Y dos más? — (Corre 1 y cuenta para verificar? — Dos más. — (Corre 1 sin contar). ¿Cómo lo sabes? — *Así da el medio.* — ¿Y si agrego otros dos? — (1 sin contar) — ¿Cómo lo sabes? — *Cada vez que se agrega uno hay que correr uno.* — ¿Y si la línea es muy larga y agrego dos? — *Corro uno.* — Uno de tus compañeros dice que si la línea es muy larga hay que correr dos. — *No sé.* — Agrego dos. — (*1*) (*idem* tres veces). ¿No cambias nunca? — *No.* — Agrego cuatro (Corre 2 lugares sin contar, y ello aún dos veces). — ¿Cómo haces? — *Cada vez que pones cuatro yo salto dos.* — Agrego dos. — *Salto uno.* — Agrego seis. — *Salto tres* (sin contar: dos veces seguidas). — ¿Y si agrego veinte? — ... — ¿Y si agrego dos de cada lado? — *El fósforo queda en el mismo lugar.* — ¿Y si agrego diez? — *Debo correr siete.* — ¿Por qué? — *Porque está en la mitad* (¿Simple error de cálculo?). — Un compañero dice que hay que correr la mitad. ¿Está bien? — ... — ¿Cuánto es la mitad de diez? *Seis de cada lado.* — ¿Y de cuatro? — *Dos.* — ¿De seis? — (Dudas) *Cinco.* — Divide esos seis. — (Toma tres) — ¿Y ocho? — *Tomo cuatro*". Se vuelven a hacer algunas pruebas de 2, 4, y 6: acertadas "*porque el fósforo está en el medio*". ¡Y sin embargo, para *m. i.* Gal permanece en el nivel IA! Se trata, pues, de un caso fronterizo, a mitad de camino entre los intermediarios precedentes y el nivel IIA.

CRI (7;3) acierta también en los desplazamientos de 1, 2, 3 para 2, 4 y 6 fichas más y da como razón general: "*Porque* (cuando) *usted avanza dos lugares, yo avanzo de uno*", lo que por tanto constituye una extensión de la idea de la mitad a 2, 4 y 6. Pero para *m. i.* Cri permanece en el nivel precedente.

BAR (9;4). Para *m. d.* y el agregado de 2: "*Corro uno* (inmediatamente y tres veces seguidas). — ¿Y si agrego cuatro? — *Corro dos.* — Cuatro más. — (Lo mismo, sin contar) — ¿Si quito cuatro? — *Corro dos para atrás.* — ¿Y si quito dos? — *Corro uno para atrás.* — ¿Y si agrego seis? — *Corro cuatro.* — ¿Seguro? — (Cuenta) *No, tres.* ¿Y si agrego ocho? — *Corro cinco.* — ¿Cómo lo sabes? — *Para que de lo mismo* (verifica). *No, había que correr cuatro.* — ¿Y si agrego diez? — *Corro cinco.* — ¿Y si agrego veinte? — *Corro diez.* — ¿Y cuarenta? — *Corro veinte.* — ¿Cómo razonas? — *Hago la mitad, así da lo mismo* (de los dos lados)". En *m. i.* es del nivel precedente.

ROY (9;8) es el primer sujeto del nivel IIA cuyas reacciones en *m. i.* están a la altura de las de *m. d.* e incluso son algo superiores, pero con posible aprendizaje (orden *m. d.* → *m. i.*). En *m. d.* acierta sin contar los desplazamientos para los agregados de 2,4 y 10: "¿Por qué? — *Cuento la mitad de diez, y da cinco.* — ¿Y si la línea es larga y agrego dos? — *Corro uno.* — ¿Y no dos si la línea es muy larga? — *No, habría más del otro lado.* — ¿Seguro? — *¡Ah, no!, si se corren dos, da lo mismo,*

porque se habrán agregado ya dos. — ¿Y si la línea es muy larga y agrego cuatro? *Hay que correr cuatro porque veinte y veinte, entonces habrá veinte y veinticuatro... ¡Ah, no!, hay que correr dos si no habrá demasiado de un lado".* *m.i.*: "Si corro el fósforo un lugar, ¿cuánto debes agregar? — *Dos para que esté en la mitad ...* — ¿Y si corro tres? — *Hay que agregar cuatro... ¡ah, no! seis".* ¿Y si corro ocho? — *Habrá que agregar dieciseis, es como si se dividiera en ocho de cada lado.* — ¿Y entonces? — *Da lo mismo y un número par.* — ¿Siempre es par? — *Si se desplazan cantidades pares, habrá que agregar cantidades pares, y si se desplazan impares, agregar impares.* — ¿Y si corro uno, es par? — *Hay que agregar dos: ¡ah, sí, me confundí!* (*n* y ya *no* 2n para *n*)".

El nivel IIA marca, pues, el paso de las cuasi-necesidades a la verdadera necesidad basada en la comprensión, es decir, en la razón del procedimiento operatorio que conduce a la solución. Esta necesidad se afirma, por el contrario, de modo inmediato en el nivel IIB (mayoría de sujetos de 9-10 años con dos casos precoces de 7 años):

GIN (9;2) se atiene, en *m.d.*, al sentimiento de evidencia. Tras haber desplazado correctamente el fósforo hasta un alargamiento de 8: "Cómo lo sabes? — *Sale solo.* — Y si agrego... (Gin interrumpe) ... *diez: entonces corro cinco porque diez menos cinco da cinco.*"

MOT (9;9) *m.i.*: "(2/2) Si desplazo un lugar. — (Agrega dos) — Y otra vez uno. — (Agrega de nuevo 2.) — ¿Cómo lo sabes? — *Porque de un lado da cinco, y del otro tres, entonces hay que agregar dos.* — ¿Y si corro dos (tapando la serie)? — *Cuatro.* — ¿Cómo lo sabes? — *Porque antes era dos para uno, ahora se avanza de a dos y eso da cuatro.* — ¿Y si la línea es muy larga...? — *No, cuando la línea es muy larga no da nada de nada".*

SYL (10;0), las mismas reacciones en el caso de *m.i.*: "*Ahora sé que hay que agregar el doble.* — ¿Y si la línea es muy larga? — *No veo por qué haya que agregar* (más del doble)... *No hay relación.*"

WOJ (10;1) *m.i.*: "Corro seis (después 1 y 2). — *Agrego doce, porque se agregan seis en cada mitad.* — ¿Y si la línea es muy larga? — *No cambia para nada que sea larga o corta".*

La reacción a las series largas muestra que la necesidad alcanzada en este nivel se ha vuelto solidaria a una comprensión explícita. Pero para extraer mejor la enseñanza de este desarrollo, examinemos también los resultados proporcionados por las otras dos pruebas.

§ 2 | LA VOTACION. — El problema de saber cuántas veces hay que desplazar para invertir una mayoría de *n*, sea $(N/2 + 1)$, plantea una dificultad análoga a la de las transformaciones *m.i.* en el § 1. En efecto, es notable que solamente 1/3 de los sujetos precedentes presenten reacciones del mismo nivel a los problemas *m.d.* y *m.i.* (aun incluyendo el nivel IA con fracaso en ambos), mientras que los 2/3 señalan un avance a menudo notable (hasta IIB contra IA) en las respuestas en *m.d.* (con la única excepción, dudosa por lo demás, de Roy, de 9;8). El motivo parece claro. En el caso de *m.d.* nos limitamos a alargar la serie, sin restar nada, y sólo se solicita al sujeto que determine la nueva mitad por igualación de las fichas de los dos lados del fósforo,

cosa que llega a hacer antes de comprender que ese desplazamiento equivale a la mitad del alargamiento. En *m.i.*, por el contrario, se comienza por desplazar el fósforo de *n*, lo que equivale, en relación con las dos mitades iniciales *A* y *B*, a sumar $A + n$, pero también a restar $B - n$, siendo entonces la diferencia de $2n$ y ya no de *n*: de ahí la tendencia inicial a alargar sólo la serie de *n* y la dificultad para comprender la relación de lo simple con lo doble, como en el problema bien conocido de la transferencia de un conjunto a otro.

Ahora bien, es este problema el que reaparece en el caso de la votación, pero a partir de una desigualdad inicial $A > B$: se trata entonces de comprender que lo que se agrega a *B* es quitado de *A*, siendo, por tanto, la adición solidaria de la resta (como ocurría precedentemente en *m.i.*). La tendencia de los pequeños sujetos es olvidarse de ésta y considerar la cantidad de veces *n* ($= A - B$) como necesaria para la inversión de los votos:

FIL (5;8 véase § 1 en IA) tiene ante sí las dos series de fichas. Se parte de 4 y 3 y se comprueba que desplazando un solo elemento se invierte en 3 y 4. "Tres y cinco. ¿Y ahora cuántos? —*Dos* (de donde 5 y 3). — ¿Uno será suficiente? —*No.* — ¿Y dos? —*No.* — Prueba. — (Comprueba 4 y 5) *Sí.* — ¿Y dos y siete? — *Cinco.* — Con menos ¿basta? (Duda, después generaliza lo que acaba de ver) *Sí.* — ¿Cuántos? — *Tres.* — Y dos ¿alcanzan también? — *Sí.* — Procura ver. — ...". Después de una interrupción de un cuarto de hora de recreación se retoma dos y siete: "¿Cuántos hay que cambiar? — *Cinco.* — ¿Se pueden tomar menos? — *No.* — Prueba. — (Comprueba que 3 provoca la inversión en 5 y 4) — ¿Y ahora tres y siete? — *Cinco.* — ¿Dónde están esos cinco? (Muestra la diferencia 7-3 contando mal.) — ¿Con menos podría bastar? — *No.*"

Un segundo nivel correspondiente al estadio II es el de los sujetos que no anticipan la solución correcta por no comprender la relación $n/2 + 1$ (si la mayoría es de *n*), sino que buscan inductivamente, desplazando las unidades de a una, una solución que, en parte se mantiene enlazada a la idea de un desplazamiento necesario de *n*:

GAL (9;1) en el caso de 4 y 3 cambia de lugar una ficha; después, para 6 y 3, cambia de lugar una y luego otra, y comprueba la inversión (en realidad 4 y 5). "¿Cuántas cambiaron de lado? — *Tres* (por lo tanto, 6 — 3 y no las dos que le bastaron en la acción). — Vuelve a comenzar (6 y 3). — (Cambia de lugar 2, y de nuevo se tienen 4 y 5.) — ¿Cuántos deben cambiar de parecer? — *Tres.* — ¿Y ahora (1 y 6)? — (Las desplaza de a una y halla) *Tres.* — ¿Y si tenemos cinco y diez? —...— Prueba. — (Las cambia de lugar de a una hasta 3 y cuenta)".

GUY (9;6) 6 y 3: "¿Cuántos deben cambiar? — *Tres.* — ¿Por qué? — *Porque todos los que querían ir a la montaña deben cambiar de parecer.* — Prueba. — *Dos.* — ¿Y cuatro y nueve? — (Procede con una unidad por vez) *Hago cambiar tres.* — ¿Y si tenemos nueve y seis? — *Si quito tres quedarán seis y nueve* — ¿Y uno basta? — (Prueba) — *No, dos, quedarán siete para la montaña y ocho para lo otro.* — ¿Cómo lo calculaste? — *De seis a nueve hay tres, y si le quito uno a nueve quedará siempre menos en el otro, entonces lo intenté con dos y así salió bien*".

Las soluciones sólo son halladas, pues, por tanteos, por falta de coordinación entre las sumas y las restas, y también por falta de conciencia de estas últimas. Hay que esperar hasta el estadio III para que esta composición de lo positivo y de lo negativo sea comprendida y culmine en una abstracción "reflexionada" a partir de esas acciones coordinadas:

SAL (12;10). encuentra, entre otros, que en el caso de 3 y 4 basta con que uno cambie de parecer para invertir la situación, mientras que si los alumnos hasta entonces enfermos se agregan a los votantes se necesitan 2 (3 + 2), y no 1, para obtener la inversión: "¿Cómo explicas eso? — *Porque si se toma uno allá* (de los 4) *hay uno de más acá* (en los 3) *y uno menos allá* (4 — 1)". Razona del mismo modo en el caso de los conjuntos de 100 y 101, etcétera.

El acceso a la necesidad, en esta prueba, está, pues, condicionado por una coordinación de restas y de sumas, como en toda transferencia de elementos de un conjunto a otro.

§ 3 | EL JUEGO DE NIM. — Para llegar a poner la cuarta ficha utilizando sólo uno o dos elementos a la vez, se tienen las siguientes posibilidades: 2,1,1; 1,2,1; 1,1,2; 2,2; y 1,1,1,1. El sujeto puede entonces razonar en función de todos estos caminos posibles (los del compañero y los suyos) pero sin la certeza, antes de cierto nivel de combinatoria, de haberlos enumerado a todos; o puede descubrir también que si el primero empieza con uno está seguro de poder ganar a condición de conservar su ventaja. Los niveles que siguen dependen, pues, de estas relaciones, así como del eventual paso de la ventaja de la colocación de la cuarta ficha a la séptima.

El nivel IA, que no presenta gran interés, es el de la ausencia de todo sistema. El subestadio IB marca el comienzo de las anticipaciones, pero limitadas y mediante aproximaciones:

SCA (7;4). "¿Quién comienza? — *Yo* (pone 1 [1]1)* ¿Quién va a ganar? — *Usted.* — ¿Hubieras podido ganar tú? — *No, porque fui el que comenzó* (o sea que invierte la relación). — Yo comienzo: —[1] 1 [2]; [1]2; [1] 1 [2]. — *¡Ah!...* [1] 2 [1] ¿No quieres intentar ganar también? — *No sé cómo hacer... Ya me di cuenta: si usted pone dos, yo puedo poner dos.* — [2] 2. — Ganaste. Si comienzo con uno, tu puedes ganar. — [1] 1 ...*Puedo ganar, pero si usted pone dos* (en la jugada siguiente), *entonces no.* — Si comienzo yo, ¿puedes ganar? — *Si usted pone uno, yo pongo uno, usted uno y yo uno he ganado.* — ¿Crees que voy a jugar como dices? — *No.* — Comienza tú. — *Uno.* — ¿Puedo ganar? — *Sí, usted uno, yo uno, usted uno y gana.* — ¿Y si comienzas con dos? — *Puede ganar también usted*". Hasta 7: "[1] 1 [1] 1 [1] 1 [1]. *¡Usted gana!* — ¿No puedes poner dos al final? — *¡Ah, sí!:* 1[2] 1 [1] 1. — ¿No puedes ganar? — *No.* — ¿Por qué no pusiste dos? — *Es verdad:* 1 [1] 1 [2] 2. — Ganaste. ¿Cómo lo hiciste? — (Repite el juego)".

Comprobamos la ausencia de toda anticipación sistemática, excepto en relación con la jugada siguiente o una serie de unidades aisladas. Desde el nivel IIA, en cambio las anticipaciones se refieren a la totalidad de la partida, de la cual la mayor parte de los sujetos halla todos los caminos y deduce, en particular, que si comienzan ellos mismos y lo hacen con uno, están seguros de ganar. Por el contrario, sólo en el nivel IIB se acierta con la manera de ganar al poner la séptima ficha, mientras que en IIA, el éxito se limita a la colocación de la cuarta:

(*) Van entre corchetes las fichas puestas por el experimentador, según el orden de las sucesivas jugadas.

TOF (7;11): "*Comienzo:* 1... — ¿Quién va a ganar? — *No sé.* — 1 [1]1... *Usted.* — Comienzo: 1 [2]... — *Usted.* — ¿Se puede saber de antemano quién ganará? — *Usted, porque comienza; pongo uno y usted gana. Si comienzo con dos, usted pone dos y gana. Si comienzo con uno, usted uno, yo uno, usted gana. Para que yo gane, usted comienza con dos, yo dos. Si no comienzo con uno, usted coloca dos, yo uno y gano.* — Si comienzo yo, ¿puedes ganar? — *No, usted pone uno, yo uno, usted uno... de todos modos, no hay que comenzar con dos*". Hasta 7: "2[2] 1 [2]. *Por cierto que jugué mal.* — ¿Qué es lo que tendrías que haber hecho? — 1 [1]1 [1] 1 [1]. *Para que usted gane, hay que hacer* 2 [2] 2 [1]". Pero no halla las series descubiertas en el caso de 4; y mucho menos aún cuando se pasa a la décima.

STO (8;6) del mismo modo: "*Yo comienzo*" 1 [1] 1... (ve que pierde y reemplaza el último 1 por un 2). — *Comienzo* [1] 1 [2]. *Gané.* Si yo comienzo, ¿puedes ganar? — *No, si usted pone uno y yo dos usted gana. Pero si usted pone dos y yo dos, yo gano.* — ¿Y si pongo uno y tú uno? — *Gana usted.* — Si quieres ganar, ¿cómo debes jugar? — *Comienzo:* 1 [1] 2".

PAT (9;6) recuerda las reglas del juego y agrega: "*Debe haber algún impedimento, si no, es muy fácil: ¡se hace dos y dos!* — ¿Quién comienza? — *Yo:* 1 [1] 2. *Gané.* — ¿Hubiera podido ganar yo? — *No: si usted ponía uno* (después de ella: 1), *yo ponía dos y si usted ponía dos, yo ponía uno* — Ahora diremos que el que pone la tercera gana. ¿Quién comienza? — *Le toca a usted.* — ¿Quién va a ganar? — *Quizás yo.* — ¿Seguro? — *Seguro* (en efecto, [2]+ 1 o [1] + 2 = 3)". Hasta 6: "para que ganes tú, ¿quién tiene que comenzar? — *Cualquiera de los dos, es una cuestión de azar.* — Con tres, ¿era cuestión de azar? — ... — 1 [1] 1... — *Estoy muy aburrida.* — ¿Quién va a ganar? — *Usted.* — Esta vez comienzas tú. — 1 [1] 2... *¡Usted!* "etcétera". — Para 9, Pat tiene un plan, pero agrega "*no lo digo*" por temor a que el compañero juegue de modo distinto del previsto: sucede eso y ella pierde.

Veamos algunas reacciones del nivel IIB con acierto en la colocación de la séptima:

SON (9;10) en el caso de la cuarta: "*Si comienzo con uno, pone dos y yo uno, gano. Si pone uno, también estoy segura de ganar.* — ¿Seguro? — *Segura y cierta*". — Nota también que si el compañero comienza por dos también pierde. Hasta 7: 2 [1] 1... "¿*Por qué te ríes?* — *Porque voy a ganar.* — Vuelve a comenzar: 1 [2] 1 [2] 1. — ¿Cómo juegas? — *Debo* (primero) *llegar a cuatro.* — Comienzo: [1] 1 [1] 1 [1] 2". También acierta cuando se trata de llegar a 10.

CLA (10;8) En el caso de la séptima: "2 [2]. — ¿Quién va a ganar? — *Yo: si usted pone dos, yo pongo uno, si usted pone uno, yo pongo dos.* — ¿Seguro? — *Sí.* — Para ganar, ¿debes jugar en primero o en segundo lugar? — *El que comienza pone el último*".

Finalmente, y para que sirva como comparación, veamos un sujeto del estadio III; el progreso cumplido en este nivel es tal que no sólo hay generalización secuencial (cf. Son: "Debo primero llegar a cuatro"), sino ajuste de las estrategias en caso de modificación de las reglas:

SER (13;8) comprueba, en el caso de 4, que gana cada vez que puede comenzar. Aplica a 7 los mismos procedimientos. Para 10: *"yo comienzo"*. 1 [2] 2 [1] 1 [2] 1. — ¿Cómo lo hiciste? — *"Exactamente como antes"*. Pero se cambian las reglas, permitiéndose la postura de 3 fichas a la vez y estableciéndose que gana el que llega a la décimotercera: Ser comienza por aplicar sin más sus tácticas anteriores, pero las corrige en el transcurso.

Dicho esto, pasemos a las interpretaciones.

§ 4 | CONCLUSIONES. — Ante estos numerosos hechos son dos las principales cuestiones que deben discutirse: la de las relaciones entre los tipos de generalización y los tipos de abstracción y, sobre todo, la de las relaciones entre la necesidad y la abstracción reflexionante. El interés de los presentes resultados reside, efectivamente, en que las generalizaciones y los sentimientos de necesidad que pueden acompañarlas, comenzando por las cuasi-necesidades, dependen, en primer lugar, de situaciones de abstracción pseudoempírica, y se refieren, por consiguiente, no a cualquier objeto, sino a objetos previamente dispuestos y modificados por el sujeto (o por dos sujetos), y ello de manera constantemente verificable pero comprensible en grados muy diversos (desde la completa falta de comprensión a la total comprensión). Ahora bien: el capítulo VIII nos mostrará, a propósito de las series exponenciales, que el niño sólo llega a observar (y a abstraer) la propiedad de crecimiento multiplicativo, en el seno de los elementos ya ordenados, en la medida en que la comprende en el curso de sus propias acciones, que consisten en prolongar las series. En los presentes casos, por el contrario, la acción propia del sujeto se continúa y se renueva sin cesar, lo cual asegura mayor solidaridad entre sus coordinadores y la lectura de sus resultados en el objeto modificado. De ello resulta fundamental entonces el hecho de que entre una lectura sin ninguna comprensión y el descubrimiento de la razón de los hechos observados, se inserta una etapa intermedia en la que el niño ya está seguro de que hay una razón pero no sabe aún cuál es: de ahí esa paradójica apariencia de un sujeto que está "seguro" antes de "saber", cuando en realidad ya "sabe" que existe una razón, pero que falta hallarla. (*).

1) En lo referente a las generalizaciones, en § 1 distinguimos dos variedades: 1° cuando el sujeto, tras hacer corresponder en forma correcta determinado alargamiento con determinado desplazamiento de la mitad de la hilera modificada (por ejemplo *2* a *1* ó 4 a 2, pero aún no *2n* a *n*), conserva esa

(*) En una vieja experiencia, efectuada junto con B. Inhelder, acerca de la suma de los ángulos de un triángulo igual a una "media luna", si se recortan los tres ángulos de un triángulo de cartón y se los vuelve a unir en una figura de conjunto, nos sorprendimos de la rapidez de las generalizaciones de sujetos aún muy jóvenes: a partir de la segunda prueba (después de haber modificado la forma del triángulo), a menudo concluían: "Dará siempre una media luna" y sólo más tarde hallaban la razón (si se disminuye uno de los ángulos es necesario aumentar uno de los restantes por compensación; si no, ya no se podrá cerrar el triángulo). Esta generalización precoz, con anticipación de la necesidad, nos pareció específica de las construcciones lógico-matemáticas (hoy diríamos de las abstracciones reflexionantes), en oposición a las inducciones simplemente físicas, en las que, por otra parte, la necesidad se descubre en cuanto hay elaboración de modelos deductivos (causalidad por atribución de las operaciones a los objetos).

misma relación particular si se modifica la longitud de la hilera (por ejemplo pasando de 2/2 a 4/4, 6/6 u 8/8), incluyendo la posibilidad de hileras "muy largas"; y, 2º cuando el sujeto, habiendo hallado la relación 2 a 1, la generaliza después con las formas 4 a 2 ó 6 a 3, etcétera (por lo tanto, $2n$ a n), sin tener necesidad de volver a contar todas las veces las fichas por comprobaciones pseudoempíricas. Notamos, en primer lugar, que, como es natural, los sujetos llegan a los comienzos de la generalización II antes de haber terminado la construcción de la generalización I, especialmente en lo que concierne a las hileras largas (es el caso, a veces, de los sujetos más jóvenes del nivel IIA).

Por el contrario, la naturaleza de ambas variedades de generalización cambia en el curso de nuestros estadios, y ello es más importante que sus relaciones de simple desplazamiento, aún cuando tal desplazamiento vuelve a hallarse entre los respectivos cambios de significaciones.

Las generalizaciones de tipo I están ausentes del nivel IA, lo cual es instructivo y demuestra que para esos sujetos un alargamiento de dos unidades no siempre da lugar al mismo desplazamiento relativo de la mitad, el cual depende de la longitud absoluta de la hilera; efectivamente: cuando hay diez fichas más espaciadas del lado derecho que del izquierdo, Fra pone el fósforo en la mitad de la longitud espacial y no entre cinco y cinco. Cuando en el nivel IB se inicia la generalización I, pero sólo a propósito de la relación de 2 a 1, la situación ya es, pues, compleja. Por un lado, el niño generaliza sin contar sólo después de varias comprobaciones empíricas del resultado de sus acciones sobre los objetos mismos, como si se tratara de la manipulación de cuerpos físicos para determinar sus propiedades: en ese sentido, es evidente que la generalización I es aún inductiva y extensional. Pero, por otra parte, las propiedades leídas de este modo en los objetos (el resultado de un alargamiento de dos unidades y de un desplazamiento del fósforo de una mientras que los dos conservan la posición de éste en la mitad de la nueva hilera) constituyen el producto de las acciones del sujeto (o de los dos sujetos), y aunque se asemeja al comienzo de la abstracción empírica, la que conduce a la generalización I es aún "pseudoempírica". Ahora bien: esto se traduce rápidamente en características nuevas: el hecho de que la acción cuyos resultados son comprobados empíricamente (o pseudoempíricamente) esté vinculada con un fin (un fin que en lo sucesivo es la equivalencia de las cantidades a ambos lados del fósforo y no la igualdad de las longitudes como buscaba el sujeto Fra), implica un juego de asimilaciones recíprocas entre el fin alcanzado (mitad) y los medios empleados (la relación 1 a 2), y no hay allí sino una comprobación y una generalización inductiva de lo comprobado: es un comienzo de coordinación cuya generalización conlleva un esbozo de abstracción reflexionante, esto es, de "actualización" de lo que estaba en "potencia" en la abstracción pseudoempírica. Ahora bien: por más que la construcción de este nuevo esquema de asimilación implique sólo un mínimo progreso en el saber del sujeto, porque está todavía muy lejos de comprender la razón por la cual esta correspondencia de 2 a 1 conserva la posición media del fósforo, este progreso es, sin embargo, notable, pues la coordinación de los medios empleados y del resultado obtenido (que el sujeto no tiene necesidad de verificar para 2 y 1), da ya al niño la impresión de que debe existir una razón.

Cuando Gui (intermedio entre IB y IIA) dice, ante un alargamiento de 4, "hay que correr dos lugares para que haya dos más de cada lado", la alcanza momentáneamente, pero la serie muestra hasta qué punto es frágil. Tan sólo no poder desarrollarla depende de las lagunas de las "abstracciones reflexionadas", y la convicción de que existe parece asegurada en estos sujetos intermedios, Gui a Dan: sería entonces, este hecho esencial, propio de la construcción de las estructuras lógico-matemáticas, el que explica la formación de esta "cuasi-necesidad" que se agrega a las generalizaciones, aún casi inductivas, de los comienzos, y que por tanto procedería de las primeras manifestaciones de la abstracción reflexionante.

2) En cuanto a la generalización II, se torna posible por los progresos de este tipo de abstracción. En los sujetos intermedios Ama y Gal el paso de 1, en 2, a 2 en 4, ó 3 en 6, es aún sólo inductivo, es decir adoptado sin determinar la razón, salvo por la verificación mental de la posición media del fósforo: pero como son las acciones del sujeto las que han conducido a ello, ya hay, pues, allí un elemento de abstracción propiamente reflexionante que se agrega a la abstracción pseudoempírica, puesto que el paso de 1, dadas 2 unidades, a biparticiones superiores no consiste en una simple repetición, como la generalización I, sino que apunta a una extensión del esquema. Ahora bien: ese comienzo, todavía modesto, de la abstracción reflexionante se refuerza notablemente en el nivel IIA, para afirmarse en forma definitiva en el nivel IIB; en efecto: desde el nivel IIA la novedad, que parece algo insignificante para un adulto pero que marca en esta edad un verdadero progreso de la abstracción, consiste en sustituir la verificación empírica o mental de la igualdad de las fichas de los dos costados del fósforo por una deducción de esa igualdad a partir de la división, en dos mitades, del alargamiento de la hilera. Es así como Bar declara: "Hago la mitad; eso da (= entraña o implica) lo mismo" de los dos lados del fósforo; las mismas referencias a la mitad en Roy (y tanto en *m.i.* como en *m.d.*), y naturalmente en los sujetos de nivel IIB.

Se advierte, pues, con claridad que la generalización II es un resultado de la abstracción reflexionante y no empírica, ni tampoco simplemente pseudoempírica, como ocurre en parte en los casos intermedios. Y ese papel de la abstracción es todavía más visible por el hecho de que a partir del nivel IIA (e incluso sólo a partir de Roy) las reacciones en *m.i.* son por fin homogéneas con las de *m.d.*, es decir que la mitad en el sentido *m.d.* se traduce en términos de doble en *m.i.*, cosa que antes no había sido comprendida, porque tal abstracción supone la coordinación de las restas con las sumas, según vimos al comienzo del § 2.

Ahora bien: la novedad esencial que implica esta abstracción de la relación de "mitad" es que proporciona por fin la razón, hasta ese momento sólo presentida, de los resultados de la partición en dos que el sujeto efectuaba ya en su acción y que, gracias al "reflejamiento" propio de la abstracción lógico-matemática, se convierte desde el estadio II, en objeto de "reflexión". Resulta entonces claro que es esta toma de conciencia de la razón la que transforma las "cuasi-necesidades" en necesidad propiamente dicha. Un buen

criterio para ello es la reacción frente a las series largas: en el nivel IIA es con dudas como Gal y aun Roy se pronuncian respecto de esta generalización, mientras que en el nivel IIB, los sujetos finalmente declaran: "No cambia nada que sea larga o corta"; o más categóricamente todavía: "No hay relación".

3) Ya estamos en condiciones de tratar la necesidad en general, en sus relaciones con la abstracción y la generalización. Es claro, en primer lugar, que cuando una generalización no deriva de una abstracción reflexionante (como la generalización II a partir de su segunda etapa y la I a partir de las últimas), sino de una abstracción empírica (inducciones), no implica ninguna necesidad: ésta, en efecto, no se confunde para nada con la generalidad, salvo en proporcionar la razón, y se define, por el contrario, por la toma de posesión de esa "razón" de las relaciones observadas. En una palabra, la generalidad como tal permanece en el nivel de lo observable, mientras que la necesidad, por su naturaleza misma de coordinación lógica, se sitúa más acá o más allá de sus fronteras.

La necesidad constituye así un (o incluso el) producto específico de la abstracción reflexionante; pero ¿cómo y por qué? No volveremos a las "cuasinecesidades", que parecen preceder (aunque sólo en apariencia) a la abstracción reflexionante, mientras que surgen de sus comienzos cuando el sujeto presiente que hay una razón que explica las regularidades observadas, aunque todavía no la puede extraer. Si nos atenemos a la necesidad propiamente dicha, consiste en coordinaciones, y éstas resultan entonces de los modos de composición de las acciones del sujeto. Por eso la necesidad es de naturaleza lógico-matemática y no física, puesto que las "leyes" de la lógica no son leyes simplemente en el sentido de la generalidad de lo observable, sino más bien las normas de la coherencia implicadora que rige las composiciones operatorias surgidas de la coordinación de las acciones. De modo muy general, la necesidad se impone así a una estructura lógico-matemática en el momento de su terminación o su cierre. ¿Qué ocurre, entonces, en el caso de nuestros ejemplos, y con qué criterios se reconoce en ella un cierre en el momento de la constitución de la necesidad?

El primero depende de las siguientes inferencias: si una hilera inicial está formada por N elementos repartidos en $(1/2\,N \mid 1/2\,N)$ y si el alargamiento es de n, los sujetos del nivel IA quitan el fósforo ($\mid$) y reúnen $N + n$ para hallar la mitad por tanteos sucesivos. Después de largas fases de verificación empírica, y después mental (cálculo de la mitad), el sujeto sólo llega a dividir n en dos "mitades"; de ahí la solución $(1/2\,N + 1/2\,n) \mid (1/2\,N + 1/2\,n)$, que es el primer signo de cierre del sistema.

El segundo es más general, porque se basa en la reversibilidad operatoria y en la coordinación de las restas con las sumas: es el paso de la "mitad (n/2)" en *m.d.* al "doble" en *m.i.* ($2 \times 1/2\,n = n$), lo que permite igualmente (pero con cierto desplazamiento) la solución del problema de las votaciones

En cuanto al juego de Nim, el cierre de los sistemas se vincula naturalmente con el cálculo de todos los caminos posibles (alcanzado desde el nivel IIA para llegar a la cuarta ficha), lo que implica la necesidad de ganar según ciertos tipos previsibles de orden. Es verdad que todavía en el nivel IIB (previsiones para llegar a la séptima ficha) algunos sujetos parecen no confiar en esta combinatoria incipiente ("naturalmente, si usted tiene un truco, ganará"), pero se trata de un factor extraño a la estructura, como es la posibilidad de una trampa: las leyes de la estructura no dejan de estar "cerradas" y se vinculan, indiscutiblemente, con una abstracción reflexionante a partir de las coordinaciones de las acciones.

En una palabra, la necesidad es, en todas sus formas, producto de la abstracción reflexionante, y constituye una de las principales novedades cuya formación es provocada por un mecanismo de este tipo.

Problemas de inclusiones y de implicaciones

EN COLABORACIÓN CON DAPHNE VOELIN - LIAMBEY
E IOANNA BERTHOUD - PAPANDROPOULOU

Investigaciones anteriores ya nos han mostrado que ciertas pruebas de implicación son más difíciles de resolver que las cuestiones de simple cuantificación de la inclusión que consisten en preguntar, entre otras cosas, si en un ramo de margaritas y de rosas hay "más margaritas" o "más flores", en cuyo caso el problema no sale de las fronteras de un "agrupamiento" elemental de clasificación.

La razón de esta diferencia es la siguiente. En un "agrupamiento" cuyas composiciones sólo se efectúan de a poco y sin alcanzar a combinatoria, las clases no conllevan directamente negación o total complementariedad, sino solamente negaciones parciales basadas en la complementariedad relativa a la clase empalmante más próxima: si *A* es la clase de margaritas y *B* la de las flores, entonces *A* se opone a *A*', definida como las *B no-A* y no como las *no-A* en general (que comprendería los animales, los minerales y todo lo que en la realidad no quedaría subsumido en las margaritas). Esta restricción en la construcción de las complementariedades (*A*' para *A* dentro de *B; B*' para *B* dentro de *C*, etc.) no es el resultado de definiciones arbitrarias, sino que corresponde al nivel de estructuración intelectual, natural y espontánea, que describe la estructura de "agrupamiento": es así como los sujetos del nivel IIB (9-10 años), para los que la cuantificación positiva de las inclusiones no plantea ningún problema, aún no saben invertirla en cuantificación negativa. Por ejemplo: esos sujetos admitirán fácilmente que existen más animales que aves, porque las segundas están incluidas en los primeros, pero no podrán deducir de ello que existen más no-aves que no-animales y hay que esperar hasta el nivel III (operaciones proporcionales o formales) para que lleguen a resolver este problema de inversión.

Ahora bien: la implicación $p \supset q$ en su forma proporcional (lo mismo que la lógica de clases en su forma general, que sobrepasa muy ampliamente las fronteras restrictivas del "agrupamiento") conlleva, por el contrario, el empleo de la negación en su sentido general: es así como $p \supset q$ significa la verdad de $p \cdot q$, o *no-p* y *q*, o *ni p ni q*, de tal modo que *no-p* es compatible con *no-q* y con *q*; por el contrario, en el "agrupamiento", *A* está necesariamente incluido en *B* (y por consiguiente *A' no-B* está excluido, al igual que *A no-B*).

La siguiente investigación tiene una doble finalidad. En primer lugar, la de intentar, variando las pruebas de inclusiones y de implicaciones, seguir el camino que conduce de una a otra, en la hipótesis de que la segunda se construye por abstracciones y generalizaciones a partir de la primera. Seguramente el proceso mismo de la abstracción reflexionante, sigue siendo inobservable, pero, en vista de los niveles establecidos, se puede intentar reconstruir su marcha. En segundo lugar, se tratará de analizar en los mismos sujetos la abstracción "reflexionada", es decir, la manera en que llegan, a reconstituir o a representarse mediante una reflexión posterior, los razonamientos que hicieron para resolver los problemas planteados. Este examen de la abstracción "reflexionada" puede, entonces, proporcionar útiles informaciones complementarias para la interpretación del proceso no directamente accesible de la abstracción "reflexionante", aunque haya, naturalmente, un posible desplazamiento entre este proceso como tal y la conciencia que se tenga de él, y aunque ésta pueda no ser siempre adecuada o enteramente adecuada.

La técnica utilizada abarca los siguientes problemas:

1) Para la inclusión se presenta primero un ramo de siete margaritas y dos rosas preguntando si hay más "flores" o más margaritas. Después se muestra un conjunto de tarjetas en cada una de las cuales está dibujado un pequeño redondel, un cuadrado pequeño o un cuadrado grande, todos pintados de verde: "¿Hay más formas verdes o más formas pequeñas?" (el término "formas" es elegido junto con el niño, quien lo prefiere al de "figuras"); o: "¿Hay más formas o más cuadrados", etcétera.

2) Entre estas cuestiones de inclusión y las de implicación en sentido general, insertamos algunos problemas de inferencia que requieren diversas composiciones entre las clases en juego: A) Se dan vuelta las tarjetas a las que se acaba de hacer referencia (pero haciendo a un lado una de cada tipo, para evitar las dificultades de memoria) y el experimentador toma, de a una en vez, una u otra, proporcionando una sola información (color, forma, o tamaño) y examinando las inferencias que el niño cree poder extraer de ella. Si se le dice "grande" o "redondo", el sujeto puede deducir unívocamente que se trata del "grande cuadrado verde" o del "pequeño círculo verde". Pero si sólo se le da como indicio "pequeño" o "cuadrado", son dos las clases de objetos de que puede tratarse; y si nos limitamos a "verde", la información es nula (tres clases posibles). Se ve que estos problemas de inferencias permiten entonces juzgar el modo como el sujeto compone los diversos encajes con sus complementariedades relativas, y también, por cierto, las afirmaciones y las negaciones parciales. B) Del mismo modo, después de haber hecho precisar que tanto los pájaros como los aviones "vuelan", y que ambos tienen alas pero que sólo el avión tiene motor, se plantean problemas tales como: "Vi un objeto que volaba en el cielo y que tenía alas; decidí que era un avión. ¿Tengo razón?" "Vi un objeto que vuela y que hace ruido. Decidí... etcétera."

3) Se pasa a continuación a los problemas de implicación en sentido general, es decir, que se refieren a proposiciones expresadas verbalmente (hipótesis) así como a clases de objetos concretos de propiedades familiares. El primer problema utilizado se debe a A. Morf: "En una fábrica de relojes se ha comprobado que todos los relojes fabricados en septiembre eran malos (para los sujetos más jóvenes se dice "el lunes"). Tomando un reloj al azar, compruebo que es malo: por lo tanto, fue hecho en setiembre. ¿Tengo razón al afirmar eso?" o "Me encuentro con una muestra hecha en julio, por lo tanto es buena..., etc."

De igual modo, el experimentador sostiene en la mano un conjunto de tarjetas y, sin mostrarlas, indica simplemente que se trata de redondeles y de cuadrados, grandes o pequeños. Si se afirma sin más que "todas las formas grandes son redondas", ¿qué conclusión se extraerá respecto de las cuadradas?

4) Después de los problemas 1 a 3, se le pide además al niño que compare de a dos algunos de los problemas presentados (elegidos según el nivel del sujeto). Si hay lugar, se pone el material sobre la mesa y se le pregunta en qué se parecen "los dos juegos". El mejor método consiste en recordar los problemas planteados en relación con uno de los dos y procurar que se determinen los problemas análogos que se relacionan con el otro.

5) Por último, se le pide a los sujetos de niveles suficientemente elevados que construyan por medio de tarjetas de diferentes formas, tamaños y colores, un modelo de una de las pruebas utilizadas; por ejemplo, la de los relojeros. A los sujetos más jóvenes se les puede presentar, después del problema 1 de las flores, el material de las tarjetas y pedirles que hagan con ellas "un juego similar al de las flores". (*)

§ 1 | EL ESTADIO I DE LA INCLUSIÓN Y DE LA IMPLICACIÓN. — Conviene señalar, en primer término, que con estas pruebas hallamos, de modo natural, los niveles conocidos del desarrollo de nuestros dos operadores, pero con algunos pequeños deslizamientos según los problemas planteados, lo cual resulta interesante desde el punto de vista de la abstracción.

Es así como en el estadio I (5-6 años como término medio), la prueba común de las flores da lugar a un fracaso bastante sistemático (salvo algunos casos intermedios de nivel IB, entre 6;6 y 7 años), mientras que el problema similar de las tarjetas da lugar a oscilaciones o a respuestas aparentemente correctas:

JOS (5;3) "En este ramo, ¿hay más flores o más margaritas? — *Más margaritas.* — ¿Más qué? — *Hay además dos rosas.* — ¿Y más flores amarillas o más flores? — ... — Muéstrame las amarillas (Ella muestra las margaritas.) — ¿Y las flores? (muestra todas.) — Entonces, ¿hay más flores o más flores amarillas? — *Más flores amarillas.* — ¿Más, que cuáles? — *Que blancas.* "En cambio, en el caso de las tarjetas, la totalidad de las verdes se impone más: "¿Hay más formas o más formas pequeñas? — *Más formas pequeñas.* — ¿Y más formas cuadradas o más formas verdes? — *Más formas verdes.* — ¿Cómo lo sabes? — *Porque hay todo eso* (= el conjunto)."

CAT (6;6): "Una niña quiere hacer un ramo con las margaritas y otro con todas las

(*) Cabe observar que los niños a los que se les pidió que construyeran un modelo que representase la historia de los relojeros no pasaron previamente la prueba de implicación con la ayuda de los cuadrados.

flores; ¿cuál será la más grande? —*El que es con todas las flores, no con las margaritas: es más que las flores* (= muestra las rosas)". Tarjetas: "*más formas verdes*" que cuadradas, pero "*más cartones pequeños*" (por oposición a los grandes) que formas verdes. Implicación: "Hallo un reloj averiado... —*¡Fue hecho el lunes!*"

COU (6;9): "¿Más flores o más margaritas? —*Menos flores.* — Si te doy todas las flores, ¿qué me quedará? — Nada. — Muéstrame las flores (¡señala solamente las rosas!). — Y si te doy las margaritas ¿qué quedará? — *Las flores, las dos rosas*". Tarjetas: "*Más formas cuadradas*" que verdes; después, "*más verdes, porque son todas verdes.* — ¿Y más formas o más de las pequeñas? —*Más formas.* — ¿Cómo lo sabes? —*Porque sí*".

BAR (6;4) es interesante por su manera poco habitual de delimitar el todo: "Si tú tomas todas las flores juntas, ¿hay más margaritas o más flores? — *Más flores.* — ¿Por qué? —*Porque hay más ramo.* — ¿Qué quiere decir eso? —*Hay una sola rosa. Ahí* (las margaritas) *hay más. Acá* (las rosas) *no cuenta para nada: no es la misma flor, crece en otro lado.* — ¿Y ésa (la margarita) es una flor? —*¡Pero no! ¡es una margarita!* — Y si están dos muchachos y tres chicas juntos, ¿qué se puede decir que son? — *Gente.* — Entonces, ¿hay más gente o más muchachos? —*Más chicas.*" Lo mismo en el caso de las tarjetas: hay "más cuadradas" que formas verdes. En cuanto a la implicación, se la concibe naturalmente como simétrica: "Me encuentro con un reloj averiado y digo que lo hicieron el lunes. ¿Tengo razón? —*Sí, sí, sí, porque usted dijo que ésos* (los relojes del lunes) *no andaban y éste no anda.*"

AST (6;10): Flores: primero "*más margaritas*"; después, con dudas, "*¿más flores?*", pero cuando se presentan dos margaritas y dos rosas: "*Es lo mismo*" (= la misma cantidad de margaritas que de "flores", como ella misma lo precisa). Figuras: "*Más cantidad de verdes que de cuadradas*", pero menos cantidad de formas que de cuadradas, y ante cinco cuadrados y uno redondo: "*Más cuadrados que verdes*".

COS (6;10) cree que hay "*más margaritas*" que flores (muestra las dos rosas como si fueran "flores"), pero ante las figuras admite, después de una larga reflexión, que hay "*más cartones*" que cuadrados. Un instante después vuelve por el contrario a "*más cantidad de pequeñas*" que de "formas".

La característica común de estas reacciones del estadio I es la dificultad para construir las clases secundarias de tipo A' en tanto reunidas con A en una clase total B y simultáneamente opuestas a A por una negación parcial $B.no\text{-}A$. De ahí la doble tendencia a reemplazar la relación de inclusión por una simple relación entre clases en disyunción caracterizadas sólo por sus diferencias, y a identificar el todo B con una de esas subclases: las A o las *cuasi*-A', es decir lo que queda de las B una vez separadas las A. Es así como Cat y Cou dan la respuesta habitual, en el caso de la comparación de las flores y las margaritas, identificando las flores B sólo con las rosas (*cuasi*-A'), y, por tanto, con el simple resto de las B, mientras que Bar asimila el todo B ("las flores" o "el ramo") a las margaritas A, porque las rosas "no cuentan para nada", "no son la misma flor", etcétera. Si bien es esto lo que ocurre con la inclusión en el caso de las flores, donde la clase secundaria (las flores no-margaritas) corresponde sin embargo a los datos perceptibles (las rosas), es evidente que *a fortiori* ocurrirá lo mismo en el problema de implicación en el que la clase de los $no\text{-}p.q$ (los relojes que no funcionan bien, pero no hechos el lunes) debe ser construida enteramente por inferencia: de ahí la tendencia casi

invencible a considerar la implicación $p \supset q$ (lunes $\supset$ averiados) como invertible en $q \supset p$ (averiados, por lo tanto, lunes, como lo dice en seguida Cat interrumpiendo a la experimentadora o como asegura Bar: "Sí, sí, sí"), es decir, como una equivalencia $p = q$ (y por lo tanto análoga a $B = A$ o $B = A'$).

Faltan, en cambio, las respuestas aparentemente correctas de Jos, Cat y Cou ante la comparación de las "formas" verdes y cuadradas (mientras que Bar y Ast no van más allá de *n* cuadradas > *n* verdes, es decir, de $A > B$ y de $B = cuasi\,A'$). Ahora bien: hay allí un interesante problema de abstracción: construir una totalidad *B* que se mantiene resistente y conserva su propiedad de totalidad B > A y B > *cuasi-A'*, es más fácil cuando la totalidad es definida por una propiedad perceptiva simple, como su color verde que cuando se lo hace por un conjunto de propiedades coordinadas en comprensión, aunque cada una sea perceptible, como en el caso de la noción de flor. Este pequeño hecho tiene su importancia (y Cou generaliza su respuesta correcta a las "formas" en sí mismas, es decir, al conjunto de los redondeles y los cuadrados presentados), pues ya nos muestra que la equilibración de las uniones (elección del todo) y de las negaciones relativas (en este caso los verdes no cuadrados, etc.) depende del grado de construcción inferencial exigido por parte del sujeto. De modo general, las uniones son facilitadas por el hecho de que los objetos o las propiedades por reunir son positivos y (en nuestra escala de observación) observables mediante la percepción, mientras que las negaciones deben ser construidas por el sujeto por medio del establecimiento de relaciones o incluso de inferencias. Ahora bien: para dar lugar a composiciones válidas, toda reunión debe estar coordinada con las negaciones correspondientes: *A'* para *A*, de donde *B.A.* y *B.A'*, o las características *a'* para la característica *a*, etcétera. La abstracción en sí misma consiste en retener una característica cualquiera *a* (operación positiva) y descartar (operación negativa) las otras; por ejemplo, *a'*. Por consiguiente, si desde la formas más elementales de inclusión, las reuniones en totalidades estables dependen de las facilidades perceptivas (el conjunto de la figuras "verdes" es más fácil que el de las flores " "), puede verse en ello el comienzo de los procesos más o menos sencillos o difíciles de construcción que conducirán finalmente a las reuniones en negaciones abstractas del estadio formal (donde los datos son de las proposiciones que se deben tratar formalmente, y no los provistos por las percepciones actuales) que caracterizan a la implicación.

§ 2 | LOS ESTADIOS II Y III DE LA INCLUSIÓN Y DE LA IMPLICACIÓN. — En el nivel IIA (7-8 años) se acierta en la inclusión de las clases de flores aunque todavía con algunas vacilaciones, y en la de las tarjetas, de modo inmediato y bien motivado:

PIT (7;1): "En este ramo, ¿hay más flores o más margaritas? — *Más margaritas.* — ¿Más que qué? — *Que flores.* — ¿Dónde están las flores? (muestra las rosas y después las deja.) — *Flores es todo.* — ¿Entonces? — *Más cantidad de flores.* — ¿Y si hay dos rosas y dos margaritas? — *Más flores, porque ambas son flores*". (Tarjetas). "*Más formas verdes, porque son todas verdes.* — ¿Y más cantidad de formas o más cantidad de cuadrados? — *Más cantidad de formas, porque todas son formas*". Pero

en lo que concierne a la implicación no hay progreso: a partir de que los relojes fabricados el día lunes andan mal, concluye que cualquier otro reloj, "*porque no había sido fabricado el lunes funcionaba*". Se le muestran entonces tarjetas dadas vuelta: "Tengo formas redondas, cuadradas, grandes y pequeñas, y rojas. Pero te digo que todas las grandes son redondas. "¿Cuáles formas tengo aquí? — *Grandes redondeles rojos, pequeños redondeles rojos, grandes cuadrados rojos y pequeños cuadrados rojos.* — Pero también te dije: todos los grandes son redondeles. Entonces tomo esta tarjeta y te digo: "Es grande." ¿Qué mas se puede decir de esta tarjeta? — *Es un redondel.* ¿Estás seguro? — *Sí, porque usted dijo que todos los grandes son redondeles.* — Y ahora tomo esta tarjeta y digo: "Es un redondel". — *Es grande.* — ¿Seguro? — *Sí, porque antes usted dijo que todos los grandes... que todos los redondeles eran grandes.* — *Y* ahora esta tarjeta: es pequeña. — *Es un cuadrado pequeño.* — ¿Cómo lo sabes? — *No lo sé... sí* (seguro), *un cuadrado pequeño... porque antes usted dijo que no había cuadrados grandes.*"

SIR (7;5). En inclusión de las flores: "*hay más margaritas... más flores... más margaritas... no, más flores.* — ¿Cómo lo sabes? — *Todas son flores.* — ¿Y si hay una margarita y una rosa, habrá más flores o más margaritas? — *Es lo mismo, hay una margarita y también una de la otra.* — ¿Pero más flores o... ? — *Más margaritas; no, flores porque* (las dos) *son flores*". Tarjetas: ninguna duda. Implicación: "Todos los relojes hechos el lunes están averiados: toma uno hecho el lunes: ¿Funciona mal? — *No, no se sabe, quizás...* (Se repite el dato.) *Sí, es correcto.*" Y toma un reloj que funciona bien: "¿Entonces no lo hicieron el lunes? — *Sí, porque el lunes no funcionaba, entonces el viernes, que es otro día.* — Y un reloj del miércoles: ¿funciona? — *Sí, tiene razón, porque los del miércoles también funcionan.* — ¿Es seguro que funcionan o también pueden estar averiados? — *No, con seguridad, funcionan bien.* — No es posible que un reloj averiado haya sido hecho un día distinto del lunes? — *No, porque usted dijo que los del lunes eran los que no funcionaban.*"

PAT(7;0). Inclusión: las mismas reacciones. Implicación: todos los relojes del miércoles están averiados. — "Este reloj está averiado, ¿entonces es del miércoles? — *Sí* (duda). — ¿O pudo haber sido hecho otro día? — *No, el miércoles.* — ¿Qué habíamos dicho antes? — *Que si es del miércoles, funciona mal.* — ¿Y respecto de los otros días? — *Averiados y no averiados.* — ¿Entonces se puede decir con seguridad que si está averiado es del miércoles? — *Sí.*"

Estos hechos muestran con toda evidencia las analogías y las diferencias entre los problemas de inclusión y de implicación. La inclusión, en principio, sólo es comprendida correctamente, y por tanto cuantificable bajo la forma $nA < nB$, si se cumplen dos condiciones que comienzan precisamente a existir en el nivel IIA: 1) Es necesario que la subclase A (por ejemplo, las margaritas) forme parte de una clase total *B* suficientemente resistente y permanente para que conserve su extensión cuando el sujeto centra su atención en sus subdivisiones: ahora bien, en el estadio I, el todo *B*, (las flores) definido con corrección cuando el sujeto sólo pensaba en él, se reabsorbía hasta identificarse con *A* o con *A'* en cuanto el niño se centraba en estas subdivisiones; en el nuevo nivel IIA, por el contrario, el niño descubre que a pesar de esas reparticiones, "Todas son flores" (Pit) o "es todo flores" (Sir). 2) Además es necesario subdividir el todo *B* en subclases *A* y *A'* explícitamente caracterizadas por negaciones parciales: *A'* = las *B no-A* y *A* = las *B no-A'*, y sólo esas negaciones, y por tanto el empleo de operaciones inversas (restas), permiten asegurar la cuantificación $nA < nB$ y superar la identificación o simetría $nA = nB$ (o $nB = nA'$).

Ahora bien: en el caso de las implicaciones propuestas, la situación es similar, aún cuando si acaban de sobrepasar las fronteras del "agrupamiento" de las clases iniciales introduciendo además el caso *ni A ni B.* 1) Decir que todos los relojes fabricados el lunes funcionan mal significa, primero, que existe un todo *B* formado por los relojes averiados y que una parte *A* de ese todo consiste en relojes fabricados el lunes, puesto que esos *A* son "todos averiados". 2) Pero para concluir que *p* (que afirma *A*) implica *q* (que afirma *B*) sin que $p \supset q$ implique $q \supset p$, y por lo tanto sin que se tenga $p = q$ o $A = B$, es necesario construir una subclase *A'* y caracterizarla explícitamente por una negación parcial (*A'* = las *B* no-*A*, o sea los relojes averiados no fabricados el lunes, o, en el caso de las tarjetas dadas vuelta, los redondeles *B* que no son grandes).

Pero entonces la primera diferencia entre nuestros problemas de inclusión y de implicación es que, en el caso de las primeras, la existencia de la subclase *A* es impuesta por la presencia de objetos dados perceptivamente (las rosas, que son flores diferentes de las margaritas), mientras que en el caso de las segundas, la subclase *A'* debe ser construida por inferencias a través de un análisis suficiente del dato (simplemente proposicional y no perceptivo) $p \supset q$ (por lo tanto, "todos los relojes del lunes están averiados"). Se agrega a ello que también la negación parcial (*A'* = *los B no-A*) debe ser extraída en forma deductiva. Por cierto, en el problema de las flores la negación supone ya parte de construcción: la percepción muestra simplemente que las rosas son "diferentes" de las margaritas, y los sujetos del estadio I aún no concluyen de ello que las rosas sean "flores no-margaritas". Prefieren traducir esta situación en una forma positiva: las rosas *A'* son lo que resta de las flores *B*, una vez consideradas las margaritas aparte. Pero está claro que una diferencia perceptible conduce más fácilmente a la negación (pues la contiene, de algún modo, implícitamente) que una reflexión formal sobre el "todo" y el "algunos" a propósito de $p \supset q$ (que excluye *p*. (*no-q*) pero no (*no-p*) *y q*.

A propósito de (*no-p*) *y q*, observamos también que los problemas de implicación llevan a generalizar el agrupamiento inicial hasta servirse de la lógica de clases sin las restricciones propias de esta estructura. Es así como en el caso de los relojes del lunes *A* que funcionan mal (*B*), para juzgar todas las relaciones, no se deben construir solamente las subclases *A'* (averiados pero no del lunes) y *B'* (si *C* = los relojes, entonces *B'* = los que funcionan bien) pero se puede continuar: si *D* = los aparatos de medición, entonces *C'* = éstos menos los relojes, etcétera. Se comprueba entonces que la expresión *ni p ni q*, que entra en la forma normal de la implicación ($p.q \vee \bar{p}.q \vee \bar{p}.\bar{q}$), es igual a $B' + C' + D' \ldots$, lo que permite extraer la siguiente ley fundamental: Si *A* está incluido en *B* y *B* en *C*, etcétera, *no-B* en cambio, está incluido en *no-A* (pues *no-A* = *A'* + *B'* + etc.), *no-C* lo está en *no-B* y por tanto en *no-A*, etcétera. Ahora bien: esta "ley de dualidad" debida a de Morgan, es de uso corriente.

Como cada una de estas construcciones que implican negaciones sigue siendo inaccesible (incluyendo la de la subclase *A'*) en este nivel IIA aunque simplemente prolonguen lo que ya supone la comprensión de la inclusión, el problema de la abstracción reflexionante estudiado en este capítulo va a consistir en determinar el modo como se efectúa el paso de estos mecanismos, adquiridos a propósito de la inclusión, a los requeridos por la implicación.

El examen de los niveles IIB y III no bastará para resolver el problema, pero es útil, no obstante, para mostrar la existencia de etapas intermedias análogas a las vacilaciones observadas en IIA en relación con la inclusión de las flores:

ALA (9;8) resuelve inmediatamente este problema de las flores: *"Hay más flores* (que margaritas) *porque las margaritas sólo son una especie, mientras que las flores son todas: las margaritas y las rosas".* Implicación: "Si un reloj funciona mal ¿fue hecho en septiembre? — *Por cierto, si el encargado dijo que todos los relojes que funcionan mal fueron fabricados en septiembre.* — ¿Qué dijo? — *Que todos los relojes de setiembre funcionan mal.* — ¿Entonces todos los averiados fueron hechos en septiembre? — *Sí.* — Y un reloj hecho en julio, ¿funciona con seguridad bien? — *Sí, porque dijo que sólo los relojes de septiembre andaban mal.* — Si se dice 1) todos los relojes averiados fueron fabricados en septiembre, y 2) todos los relojes hechos en septiembre están averiados ...? — *Son dos cosas diferentes: en 1) se dice que "todos" y en 2) "todos los hechos en setiembre",* y *puede haber otros, hechos en otro mes, que estén averiados.* — Un reloj fabricado en octubre ¿funciona bien con seguridad? — *Sí, con seguridad... también uno se puede engañar.* — ¿Y si el reloj está averiado, entonces es de septiembre? — *Uno puede engañarse, porque con frecuencia hay relojes averiados de otros meses."*

FAR (10;3). Acierta inmediatamente en las inclusiones. Implicación: "Todos los del martes funcionan mal. Este es del lunes ¿entonces funciona bien? — *Sí.* — ¿Por qué? — *Porque los del martes están averiados. Entonces es seguro que el del lunes anda.* Ahora tenemos un reloj averiado: ¿es del martes? — *Sí, porque todos los martes los relojes salen averiados.* — ¿Y los otros días? — *Funcionan bien.* — ¿Se dijo así? — *No.* — Cuando se dice que los del martes funcionan mal, ¿qué se puede decir respecto de los de los otros días? — *Que funcionan bien.* — ¿Se puede decir eso? — *No, a veces también pueden funcionar mal."*

DAN (11;4). Las mismas reacciones. Para las dos proposiciones presentadas a Ala (véanse 1) y 2)): *"Es casi lo mismo.* — ¿Cuál es la más clara? — *La 2".* Tarjetas dadas vuelta: "Tengo redondeles y cuadrados, grandes y pequeños. Sólo te digo: todos los grandes son redondos. Tomo *1*: es grande. — *Es un redondel.* — ¿Por qué? — *Porque usted dijo que todos los grandes eran redondos.* — Uno es pequeño, es, por lo tanto cuadrado. ¿Tengo razón? — *No se puede saber: si hay también redondeles pequeños y cuadrados pequeños, no se puede saber.* — Tengo un cuadrado: digo que es pequeño. ¿Es correcto? — *No se puede saber.* — Se dijo que todos los grandes ... — *Son redondos.* — ¿Entonces, un cuadrado? — *Es pequeño, porque se dijo que todos los grandes eran redondos: si hay un cuadrado, es un cuadrado pequeño.* — Tengo un redondel, ¿es grande? — *Sí, porque las formas grandes son sólo redondas. Si se dice que es grande, se dice con seguridad que es redondo.* — Y si se dice que es redondo, ¿es seguro que es grande? — *No, puede haber redondeles pequeños."*

Estas dudas en los sujetos de 9 a 11 años son muy instructivas. Si se consideran sus reacciones ante los problemas de inclusión, resulta claro que en presencia de objetos concretos no experimentan ninguna dificultad para ordenar el "todo" y el "algunos", en el interior de una estructuración de "agrupamiento": nótese que Ala precisa que "las margaritas sólo son una especie", etcétera. Su incapacidad de hacer lo mismo con datos verbales (o sea, proposicionales) de los problemas de implicación parece deberse simplemente, a la dificultad de las trasposiciones de lo concreto a los enunciados proposicionales, esto es, del reflejamiento o "reflexión" al sentido de

reflector, es decir a la primer característica de la abstracción "reflexionante". Pero esta condición previa, que los sujetos llegan finalmente a cumplir, aunque con dificultades y tras muchas dudas, debe conducir normalmente a la segunda característica de la abstracción reflexionante, es decir a las generalizaciones y a las nuevas construcciones, que permite la "reflexión" (en el sentido de actividad mental de reorganización) en un nuevo plano que es el de los meros enunciados proposicionales. Ahora bien: sólo se alcanza este segundo progreso en el nivel IIB, en tanto que las manifestaciones de este pensamiento generalizador se perciben rapidamente, a partir de los comienzos del estadio III (11-12 años), incluido el siguiente caso precoz:

SAM (9;1) Relojero: "Un reloj que funciona bien ¿es seguro que proviene de un mes que no es septiembre? — *Sí, porque todos los relojes fabricados en septiembre son de mala calidad.* — Un reloj hecho en octubre ¿es seguro que funciona bien? — *No, entre los de ese mes puede haber algunos que funcionen mal.* — ¿Cómo puede ocurrir que nos equivoquemos? — *Miramos el reloj averiado y decimos que seguramente es de septiembre: no tenemos razón ... pensamos que sólo los relojes de septiembre funcionan mal.*"

El sujeto Sam formula explícitamente la fundamental distinción formal entre el "sí" y el "solamente si", tan corriente en matemáticas y que caracteriza la implicación: en el caso de $p \supset q$, *siempre tenemos q* verdadero si *p* es verdadero, pero *solamente si* lo es, porque tenemos asimismo la verdad de "*no-p y q*". Pero veremos mejor el progreso a propósito de las utilizaciones de índices y de la abstracción "reflexionada".

§ 3 | LA UTILIZACIÓN DE ÍNDICES. — Los problemas de inferencia a partir de las informaciones o índices proporcionados a los sujetos, presentan el interés de que empleando el mismo material de tarjetas que para ciertos problemas de inclusión y de implicación, y haciendo construir inferencias que lógicamente conllevan las mismas inclusiones e implicaciones, se obtienen las soluciones más precoces y más fáciles por el solo hecho de que no se recurre a ninguna cuantificación o negación explícitas y que todo el razonamiento se efectúa en "comprensión" a partir de cualidades positivas comunes o diferentes.

Por lo que se refiere a las tarjetas, recordemos que se presentan, sobre cartones del mismo formato, cuadrados grandes y pequeños y redondeles pequeños, y que todos los cartones se dan vuelta y hay varios de los tres tipos, pero se deja un ejemplar visible de cada uno como ayudamemoria. Los problemas de ajuste consisten, pues, en reconocer, distinguiéndolos, dos tipos de cuadrados, dos tipos de figuras pequeñas, una sola especie de redondeles (pequeños) y también una de tamaño grande (cuadrada), siendo verdes todas las figuras. En cuanto a las inferencias, se trata de caracterizar las propiedades no visibles de una tarjeta o juzgar imposible decidir la elección cuando se da una sola información: "redondo", "cuadrado", "pequeño", "grande", "verde". Se ve entonces que existe analogía con los problemas de implicación: "grande" implica "cuadrado", pero lo recíproco no es verdadero, porque "cuadrado" corresponde a "pequeño" a "grande", etcétera. La novedad es entonces que el problema se plantea en términos de alternativas o de disyunciones: *x* significa *A1* o *A2*, es decir lo uno o lo otro

si se trata de remontarse a los términos individualizados, o también *A1* o *A2* o *A3* cuando el índice *x* es "verde". Ahora bien: lo interesante de esta prueba reside en que nos muestra que este tipo de "implicación significante" (noción que queda por caracterizar en vista de los hechos) y no proposicional, es mucho más precoz que esta última y de facilidad por lo menos semejante, y en general superior, a la de la inclusión de las tarjetas, siendo menos difícil que la de las flores.

Veamos en primer lugar algunos ejemplos del estadio I:

CAT (6;6) cuyas vacilaciones ante la inclusión de las tarjetas ya hemos visto (§ 1), comienza, en el caso del índice "pequeño", por decir "el pequeño cuadrado"; después reconoce que puede ser un pequeño "*redondel, pero estoy segura de que es cuadrado*", cosa que ella pretende "adivinar". — "Ahora es grande. — *Es el cuadrado grande.* — ¿Seguro? — *Si no, no hay nada grande.* — Ahora tú me vas a hacer las preguntas a mí. Me puedes hacer una pregunta difícil. — *Es verde.* — ¿Por qué es difícil? — *Todos son verdes.* — Y otra menos difícil. — *Tiene cuatro puntas.* (= cuadrado) — ¿Por qué es difícil? — *Porque hay dos.* — Ahora una fácil. — *No tiene puntas ... es pequeño* (agrega, tras algunas dudas, este segundo índice de más)."

BAR (6;4) a quien hemos visto (§ 1) fracasar en la inclusión: "Es redondo. — *Es aquella* (el único cartón posible). — Ahora otra: es verde. — *Es cuadrado.* — ¿Por qué? — *Porque siempre era redondo, ahora es cuadrado* (intenta, pues, adivinar). — Te había dicho que era verde. — *Pero todos son verdes. Entonces no se puede adivinar* (= elegir correctamente). — Otro: es grande. — *Y bien, es así* (cuadrado pequeño). *No le diré cómo lo hallé: tiene que adivinar* (Bar tiene, pues, conciencia de haber elegido entre los dos pequeños)."

AST (6;10) (véanse en el § 1 sus oscilaciones en la inclusión): "Es cuadrado. — *Es aquél* (el pequeño). — ¿Cómo lo sabes? — *Adivino.* — ¿Podemos estar seguros? — *No, porque está también el grande.* — Otro: es pequeño. — *Un redondel, pero tampoco es seguro: también está el cuadrado.* — Hazme una pregunta, pero muy fácil. — *Es grande y verde.* — ¿No puedo equivocarme? — *No, porque no hay otro grande* (aparte del cuadrado grande). — Ahora una pregunta difícil. — *Es cuadrado.* — ¿Por qué es difícil? — *Porque es así o así.* — ¿Y que otra pregunta fácil podrías hacerme? — *Un redondel.*"

COS (6;10) en el caso de la inclusión de las tarjetas se mantiene en una situación intermedia (nivel IB): hay más cartones que cuadrados, y también más cantidad de verdes, pero hay "*más pequeñas que formas*". Indices: "¿Es pequeña? — *Es un cuadrado pequeño o un redondel pequeño.* — Es grande. — *Aquél.* — Es verde. — *Todo el conjunto lo es: cuadrados, pequeños cuadrados y redondos.* — Hazme una pregunta difícil. — *Es pequeña.* — ¿Por qué es difícil? — *Hay que elegir.* — ¿Un problema fácil? — *Es grande.*"

La calidad de estas respuestas es sorprendente si se las compara con las insuficiencias de estos mismos sujetos ante los problemas de inclusión. Varios de estos niños pretenden poder "adivinar" correctamente, pero eso corresponde a las actitudes de este nivel en lo concerniente a los problemas de azar.

Por otra parte, el intento de adivinar supone admitir que existen varias posibilidades equivalentes, cosa que Cat y Bar reconocen rápidamente y en forma inmediata Ast y Cos.

En cuanto al sentido de estas reacciones, examinemos primero las del nivel IIA, pues tras estos buenos comienzos, pronto las respuestas son todas correctas.

Veamos tres casos del nivel IIA:

PAT (7;0) (véase el § 2): "Es pequeña. — *Es ésta* (redondel pequeño). — ¿Seguro? — *O ésta* (cuadrado pequeño). *No se puede estar seguro porque las dos son pequeñas.* — Tomo otra (en el caso de Pat se utilizaron redondeles grandes como las únicas figuras grandes): es redonda. — *Es esa* (redondel grande) *o esa* (redondel pequeño). — Otra: es cuadrada. *Es ésta* (cuadrado pequeño). *No hay otros cuadrados.* — Es verde. — *Una de estas tres.*

SIR (7;5) (véase el § 2). "Es pequeña. *Un cuadrado.* — ¿Seguro? — *Quizás sea falso; podría ser un redondel.* — Es grande. — *Entonces es un cuadrado* (certidumbre). *Sí, es el único que había.* — ¿Y por qué "pequeño" es más difícil? — *De ellos había dos.*"

PER (8;4) "Hazme una pregunta para que el señor la responda. — *Es pequeño, no* (*así no está bien*) *porque hay dos pequeños. Es grande.* — ¿Y si dices "pequeño"? — *Puede ser pequeño redondo o pequeño cuadrado.* — ¿Y si dices "cuadrado"? — *Puede ser grande o pequeño.*"

Las respuestas de los niveles IIB y III son, asimismo, inmediatamente correctas y bien motivadas. En cuanto a su interpretación, disipemos ante todo un posible malentendido. En efecto, se podría pensar que la solución rápida de estos problemas se vincula con el hecho de que se trataría de simples comprobaciones o lecturas perceptivas de los datos, porque las tres figuras en juego son presentadas de modo visible y la tarea del sujeto consiste nuevamente en identificar tal o cual de las múltiples tarjetas dadas vuelta, con una u otra de estas tres formas visibles. Pero si bien hay, por supuesto, una facilitación en relación con nuestros problemas de implicación (con las mismas tarjetas o con los relojeros), donde los datos se mantienen en el estado de enunciados verbales, no sucede lo mismo en relación con los problemas de inclusión, donde todos los objetos están presentes y visibles y donde no hay nada que inferir, sino que simplemente se trata de construir, para compararlas, clases y subclases reuniendo o disociando elementos todos los cuales perceptibles.

Ahora bien: vemos a sujetos como Bar, quien, en ocasión de los problemas de inclusión, responde "más cantidad de cuadrados" cuando desea compararlos con las figuras verdes; y declara, a propósito de los problemas presentes: "todos son verdes, entonces no se puede adivinar" si se trata de cuadrados o redondos y no grandes o pequeños. Véanse también los casos de Cat y, sobre todo el de Cos, para quien "verdes" es "todo el conjunto: cuadrados, pequeños cuadrados o redondos". Dicho de otro modo, desde el

estadio I los problemas de inclusión $B > A$, al igual que $C > B > A$ (donde $C =$ el todo, B los pequeños o los cuadrados y $A =$ los términos individuales) ¡parecen resolverse *a priori* sin dudas! En cuanto a las clases secundarias A' (o aún B') parece ocurrir lo mismo con sus negaciones parciales implícitas: Cuando Ast dice de los "cuadrados" (elegidos por ella misma como índice "difícil") "es éste (el grande) o éste (el pequeño)", tal alternativa equivale a admitir: si es el cuadrado grande, no es el pequeño, y recíprocamente, conllevando cada subclase la negación de los caracteres de la otra. Y cada uno de estos sujetos razona así, tanto en el estadio I como en los siguientes. Queda la implicación, de la que hemos visto que, hasta el estadio III, la dificultad sistemática era no considerarla como necesariamente simétrica o recíproca: si "todos los grandes son redondos", no concluir de ello que "todos los redondos son grandes". Ahora bien: en las respuestas que se acaban de leer, ninguno de los sujetos comete ese error, y para todos el carácter cuadrado de la figura grande (o redondo en el caso de Pat) conduce a una disyunción (comparable con $p.q. \vee no\text{-}p.q.$ en la relación $p \supset q$): entonces "es así o así" (es decir, cuadrado grande o pequeño, y no "grande $\rightleftarrows$ cuadrado")

En una palabra, las reacciones que acabamos de describir, o sea las inferencias a partir de índices significativos, parecen no sólo preparar las estructuras de implicación sino también esbozarlas simplificando ya de manera notable los problemas de inclusión. ¿A qué se debe esa facilidad? La respuesta parece evidente: ninguno de los problemas precedentes está planteado en términos de cuantificación ni de negaciones, ni siquiera parciales (cf. las flores no margaritas: B *no-A*), de tal modo que el sujeto puede razonar por conexión de pura "comprensión": "grande" significa "cuadrado", "redondo", significa "pequeño", "pequeño" significa "redondo o cuadrado", etcétera, sin que haya necesidad de precisar la "extensión" de esas nociones significadas o significantes, es decir, de cuantificarlas, siendo la única cuestión cuantitativa saber si un índice nocional corresponde a un solo conjunto de figuras, a dos o tres. En cuanto a las negaciones implícitas (redondo = no cuadrado, etc), son tratadas por el niño en tanto relaciones de simples "diferencias", como en las "lógicas sin negaciones" de Griss o de Nelson. Es verdad que en sí misma una diferencia cualitativa presupone una negación, pero de modo implícito y, para la conciencia del sujeto, se expresa únicamente en términos de afirmaciones: cuadrado "o" redondo, y el funtivo disyuntivo "o" significa, pues, "otra" afirmación y aún no la negación de uno de los términos respecto de esa "otra".

Falta entonces comprender en qué consiste esa relación general, que no es ni una inclusión de clases (extensión) ni una implicación proposicional, sino que precede a ambas al punto de que, en numerosos casos, se lo puede dominar, en los niveles preoperatorios y, a menudo, aun en los estadios senso-motores. Propondremos el vocablo (ya utilizado en trabajos anteriores) de "implicación significante", con el que designaremos la relación entre dos significaciones tal que la primera involucra a la segunda. Ante todo hay que precisar que no se trata aquí de una relación lingüística entre signo y significación, pues si bien el signo verbal (la palabra) es un significante, no es más que eso, y su significación se refiere a un concepto; de ahí, en este caso, la

heterogeneidad del significante y del significado y la autonomía de la lingüística como ciencia de los significantes (*). En el caso de la implicación significante, por el contrario, el significante momentáneo, aún cuando lo llamemos índice, como en la presente experiencia, conlleva su propia significación conceptual (por ejemplo "pequeño" o "cuadrado", etc), la cual entraña otras significaciones igualmente nocionales; las funciones de significante y significado tienen ese sentido sólo en razón del contexto, y pueden ser invertidas. Pero, segunda observación, la relación de implicación significante no es recíproca por sí misma. En los ejemplos presentes, "redondo" significa "pequeño", pero "pequeño" significa "cuadrado o redondo"; del mismo modo, "cuadrado o redondo" no significan a su vez "pequeños", sino "pequeños o grandes", etcétera. En cuanto a la precocidad de estas relaciones de implicación significante, no hay razón para que en sus formas más simples, no comiencen, en los niveles senso-motores, como especies de una implicación entre esquemas, porque todo esquema de asimilación conlleva una significación y todo acto de asimilación comportamental consiste en conferir significaciones. Así, para un bebé de doce meses el hecho de que un objeto alejado sea puesto sobre un soporte implica la posibilidad de alcanzarlo tirando de éste último. Solamente hay que precisar que la implicación, por más precoz que sea en sus aspectos de conexiones entre significaciones, constituye un resultado y no un dato primero, que consiste en una actividad, la de la asimilación.

Dicho esto, recordemos que nuestro problema era intentar una explicación del modo como la abstracción reflexionante puede extraer la implicación proposicional de los mecanismos constitutivos de la inclusión de clases (siendo ésta parcialmente isomorfa con aquélla). Ahora bien: este problema se amplía ahora un poco, porque creemos hallar en la implicación significante una fuente común de las inclusiones y de las implicaciones (proposicionales), pero se entiende, o al menos queda supuesto, que el camino que conduce a estos últimos pasa por las inclusiones, aun (o sobre todo) si éstas deben su constitución a una cuantificación de las implicaciones significantes. La hipótesis que parece más verosímil es, en efecto, que a partir de los múltiples nexos construídos por implicaciones significantes (lo que en cierto sentido

(*) Hjelmslev, en sus *Prolégomènes à une théorie du langage*, París 1968, (hay trad. esp., *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*, Madrid, Gredos, 1974) muestra con profundidad que todo lenguaje supone cierta cantidad de "rasgos fundamentales" y necesarios (precisa cinco), el primero de los cuales es la presencia de dos planos (contenido y expresión) y el quinto es la "no-conformidad" de esos planos, es decir la falta de identidad de las funciones ejercidas por los derivados de los funtivos que se corresponden en esos dos planos. En consecuencia Hjelmslev pone fuertemente en duda la asimilación del álgebra a un lenguaje, porque se trata de estructuras "monoplanas": por tanto, "según nuestra definición no son lenguajes y difieren de las verdaderas estructuras lingüísticas en un punto fundamental" (pág. 152). De modo general, se opone a "la utilización demasiado libre y vaga que se hace de este término (lenguaje) en la lengua cotidiana y en las obras filosóficas, donde todo lo que más o menos se parece a un signo con frecuencia es llamado lenguaje de modo injustificado" (pág. 227). Es evidente, pues, que nuestra "implicación significante" no tiene relación con la lingüística, porque se mueve en un plano único: la significación *A* implica otra significación *B* según una conexión que implica igualmente una significación y que enriquece a las otras dos, desarrollándose la totalidad en un solo y el mismo plano, el de los esquemas o conceptos, y no en el de los signos en el sentido lingüístico de Hjélmslev.

equivale a decir: por asimilaciones en comprensión), se torna posible una cuantificación al ponerse en correspondencia estas relaciones en comprensión con relaciones de extensión y por traducción de las relaciones entre diferencias en negaciones parciales propias de las clases secundarias. Hay, por supuesto, una primera manifestación de abstracción reflexionante, pero que conduce sólo a los sistemas de inclusiones característicos de los "agrupamientos" de clases con sus limitaciones. Por el contrario, en la continuación, las múltiples combinaciones que permite el juego de las implicaciones significantes ("es eso o eso" según los índices hallados sucesivamente) conducen a las estructuras de "conjunto de partes" y permiten entonces sobrepasar finalmente lo concreto y construir las implicaciones proposicionales.

Proporciona una primera verificación de esas hipótesis el problema de los pájaros y los aviones, que es particularmente simple, porque sólo hace intervenir dos clases de objetos (aunque no estén puestos concretamente sobre la mesa) y una sola diferencia (la presencia o ausencia de un motor). De ahí resulta que esta cuestión sea resuelta en todas nuestras edades y que frecuentemente se vea a los sujetos del estadio I traducir ya estos datos en términos de inclusiones y negaciones parciales:

BAR (6;4) es el único que dudó en sus respuestas, pero sólo por un instante: "*Veo* un objeto con alas... —*Entonces es un pájaro.* — ¿Podemos estar seguros? — *Sí, quizás.* — ¿Qué podría ser también? — *Un avión.* — ¿Podemos estar seguros o no? — *No tan seguros...* (el avión) *también tiene alas.*"

CAT (6;6) "Si veo algo con alas y digo es un pájaro ¿está bien? — *Puede ser un avión.* — ¿Y si hace este ruido (imitación)? — *Es un avión, los aviones hacen así y los pájaros no. Los pájaros trinan.*"

DOM (6;6): "Veo algo que vuela. —*Es el avión... El avión, el pájaro, el cohete.* — ¿Por qué? — *Porque todos tienen alas.* — ¿Y si tiene motor? —*El cohete o el avión. El avión tiene motores, pero el pájaro no.* — ¿Y si tiene ventanas? — *El avión, porque el cohete no tiene ventanas.*" (A Dom no se le había hablado de cohetes; los introdujo como un elemento más.)

Estas respuestas triviales requieren, sin embargo, dos observaciones. La primera es que si resulta fácil a sujetos de 4-6 años comprender que un índice que se aplica a toda una clase *B* nada prueba en cuanto a la presencia de una subclase *A*, no sucede lo mismo en los comienzos de la representación. Uno de nuestros niños, al discutir con su padre para saber si una imagen representaba a un perro o un gato, encontró finalmente sólo este argumento: "Es un perro, porque es gris", como si ese índice no se aplicara a los dos. Y en segundo lugar, si se ve a Cat y Dom manejar con facilidad el todo ("todos tienen alas") y las negaciones propias de las clases secundarias (los aviones "hacen ruido y los pájaros no"), es porque tienen que obrar con un solo índice simple que opone a las dos subclases, y aun el todo se caracteriza por una sola propiedad (las alas; cf. el color verde en el caso de las figuras del § 1), mientras que para comparar las flores y las margaritas, y para construir la clase secundaria de las flores no-margaritas, hay más índices por coordinar. No resultará menos útil mostrar, a través de estos pequeños ejemplos, que en el caso de datos

bastante simples, el sujeto extrae fácilmente del funcionamiento de esas implicaciones significantes un juego elemental de cuantificación (¿"todos" y no todos?) y de negaciones parciales ("los pájaros no", etc.) Por tanto, estas formas tan triviales de abstracción reflexionante que extraen un principio de estructura a partir de un funcionamiento previo sólo tendrán, en lo sucesivo, que ser generalizadas para conducir a las inclusiones y, por último, a las implicaciones proposicionales.

§ 4 | LAS ABSTRACCIONES "REFLEXIONADAS". — Si bien los procesos de estas abstracciones sucesivas son, como tales, inobservables, la conciencia que se toma de ellos, aunque siempre posterior a las construcciones mismas, pueden informarnos retroactivamente acerca de sus mecanismos. Ahora bien, esas etapas de la "abstracción reflexionada" (en tanto tematización posterior de los procesos anteriores) van a ponernos precisamente en presencia de las cuantificaciones y de la negaciones progresivas que marcan el paso de las implicaciones significantes a las inclusiones y a las implicaciones proposicionales:

El primer nivel, correspondiente al comienzo (IA) del estadio I, se caracteriza por la ausencia de toda estructura y por una simple búsqueda de semejanzas y diferencias entre los objetos, en sí mismos, que pertenecen al dispositivo material de las pruebas:

JOS (5;3), al comparar la inclusión de las flores con la de las tarjetas se da cuenta de que esos juegos "*no son similares*", pero a continuación llega a la analogía de "*que* (las margaritas) *tienen el mismo color* (entre sí) *y éste y aquél* (los dos cuadrados) *son las mismas* (formas)".

BAR (6;4) encuentra "*muy diferentes*" los problemas de las implicaciones referentes a los relojes y los de las tarjetas dadas vuelta: "*No hay nada que se parezca*". Pero termina con este hallazgo: "*No hay nada que se parezca; ¡usted me pregunta cada cosa!*".

DOM (6;11). Inclusiones flores y tarjetas: "¿Los dos juegos se parecen? — *Este y éste* (una margarita y un redondel grande verde) *se parecen porque es redondo y eso* (cuadrado)... *No. Solamente los otros. Hay que quitar eso* (las rosas) *para hacer bien el juego* (de comparación): *no hay formas* (tarjetas) *así. Y después del juego de tarjetas, hay que quitar esto* (los cuadrados) *porque no hay formas* (de flores) *así.*"

TIA (7;1) se rehúsa a toda comparación entre el problema de los relojes y el de la implicación con las tarjetas: "Pero los problemas que se plantearon, ¿se parecen un poco? — *No.* — ¿No se puede decir que "todos los relojes del lunes funcionan mal" se parece a "todos los grandes son redondos"? — *Sí.* — ¿Y si digo "los pequeños son redondos o cuadrados", ¿a qué se parece en la historia de los relojes? — *A que los relojes pueden ser redondos o cuadrados*".

Estas primeras reacciones se ajustan a las características generales de las implicaciones significantes más elementales (ya superadas en las acciones efectivas de los sujetos al enfrentarse con un problema): consideración exclusiva de las cualidades en comprensión, sin cuantificación y, desde ese punto

de vista, sin alcanzar la estructura de los problemas planteados; de ahí el centrarse en los objetos como tales o en el hecho de haber "preguntado" (Bar). Por el contrario, Dom y Tia, a pesar del carácter descabellado de sus proposiciones, no se contentan, como Jos, con decir que las flores se parecen entre sí como las figuras entre sí: buscan correspondencias cualitativas entre los dos conjuntos que se comparan y se orientan así en la dirección del segundo nivel.

Este se caracteriza, en efecto, por una búsqueda de correspondencias, pero apuntando esta vez a la cuantificación:

AST (6;10, véase § 1). Comparación de las inclusiones de flores y de figuras: "*Usted preguntó si había más margaritas o más rosas.* — ¿Y otra cosa? — *No me acuerdo.* — ¿Más margaritas o más flores? — *Sí.* — ¿Y el juego de tarjetas se parece un poco? — *No.* — ¿Cómo hiciste para hallar el resultado en el caso de las flores? — *Porque allá* (rosas) *había solamente dos.* — ¿Y para hallar el resultado en el caso de las tarjetas? — *Allá* (cuadrados) *hay más.* — Intenta ahora hacer con las tarjetas un juego que se parezca al de las flores. — (Alínea cuatro figuras grandes redondas y tres pequeñas.) — Pregúntame ahora tú a mí. — *¿Dónde hay más?* — ¿Más cantidad de qué? — *De redondos.* — ¿Cómo? — *Grandes* (más cantidad de grandes que de pequeños). — ¿Es el mismo juego que con las flores? — *Sí* (pone cuatro margaritas en correspondencia óptica con cuatro figuras grandes redondas, separando las otras, y las dos rosas frente a tres figuras redondas pequeñas. — Hazme otra vez tú las preguntas. — *¿Dónde hay más flores?* — Pero todas son flores. — *Entonces, ¿dónde hay más margaritas?*".

COS (6;10): El juego que hiciste con las flores, ¿se parece al de las tarjetas? — *Sí, hay dos rosas allá y aquí dos grandes cuadrados verdes.* — ¿Y qué otra cosa? — *Hay eso* (las margaritas), *que va con aquéllos* (los redondeles) — ¿Por qué pones las dos rosas con los dos cuadrados grandes? — *¡Es complicado! Porque acá* (cuadrados pequeños) *hay tres, y acá* (redondeles pequeños) *hay cuatro* (los alínea y pone frente a ellos las siete margaritas). — ¿Cómo se llama este ramo? — *Este un ramo de margaritas y de rosas, éste, de verdes y cuadrados.* — ¿Dónde están los verdes? — ... — ¿Cómo se llama esto y esto (redondeles y cuadrados pequeños)? — *Todos los verdes... no el, ramo de cuadrados y de redondeles verdes.* — Bien. ¿Piensas que los problemas que planteábamos se parecen? — *Sí, ahí* (flores) *hay cuatro, tres y dos, y ahí* (tarjetas) *dos, cuatro y tres.* — ¿Te acuerdas de las preguntas? — *Sí: ¿por qué allá hay dos?* — Está bien; yo voy a hacerte una pregunta en relación con las flores y tú hallarás una que se asemeje, en relación con las tarjetas. ¿Hay más margaritas o más rosas? — *Más margaritas.* — ¿Y para las tarjetas? — *Hay menos de éstas* (cuadrados grandes). — Y otra pregunta: ¿más flores (subrayamos) o más margaritas? — *Más margaritas.* — ¿Y para las formas? — *Allá* (grandes) *hay dos y acá hay siete*".

CAT (6;6): Flores y tarjetas: "*Se parecen muy muy poquito.* — ¿En qué? — *Es casi el mismo juego porque allá se dijo '¿De qué hay más?', y acá también*". — Te hago la pregunta en relación con las flores y tú hallarás una que se asemeje en relación con las tarjetas: '¿Hay más flores o más margaritas?' — *¿Hay más cuadrados que redondeles?* — Ahora haremos lo contrario (tarjetas → flores): "Hay más cantidad de formas o de pequeñas?" — *¿Más cantidad de flores o de margaritas?* — ¡Bien! ¿Más cuadrados grandes o más cuadrados pequeños? — *¿Más cantidad de hojas o de flores?* — ¿Por qué se parecen? — *Porque hay más hojas.* — Dime por último: ¿hay más flores o más margaritas? — *Más margaritas.*"

Estas respuestas, que corresponden a lo que hemos visto en los § 1 y § 3 de las reacciones del estadio I a los problemas de inclusión y de utilización de índices, permiten, pues, extraer, por un lado, la toma de conciencia, por parte de los sujetos, de los problemas que les han sido planteados, pero sobre todo, por otro lado, la significación que le atribuyen a estos problemas según disciernan en ellos ciertos elementos comunes o dejen escapar su estructura esencial. A pesar del retraso natural y general de la toma de conciencia en relación con la construcción efectiva, cabe pensar, pues, que los intentos de comparación que emprenden Ast, Cos y Cat, nos informan indirectamente acerca del proceso que asegura el paso entre la implicación significante puramente cualitativa (conexiones en comprensión) y la inclusión como comienzo de la cuantificación en extensión. Desde ese punto de vista, las respuestas son instructivas por su convergencia y su sencillez: mientras que en el nivel precedente los sujetos buscaban a lo sumo (como Dom) correspondencias cualitativas entre los dos conjuntos (flores y tarjetas), éstos emprenden inmediatamente intentos de correspondencia término a término, correspondencia prenumérica —aún no numérica, porque las correspondencias de figuras (u ópticas) no implican todavía la construcción de equivalencias— que es, por lo demás, el instrumento que permite al sujeto efectuar la comparación de las subclases entre sí, y por tanto, su cuantificación en extensión.

Serían, pues, las correspondencias término a término (con retención de la cualidad, pero aún no de la cantidad) las que asegurarían el paso de las correspondencias cualitativas en los comienzos de la extensión. Recordemos, al respecto, que las investigaciones de Inhelder, Sinclair y Bovet acerca del aprendizaje han mostrado que tales correspondencias, con la retención de la cualidad, son necesarias para la adquisición de la inclusión, pero los sujetos a los que nos acabamos de referir aún no han llegado a eso (véase Cat, incluso al final de su interrogación) y se atienen a las correspondencias entre clases disjuntas.

En el nivel siguiente (que corresponde al subestadio IIA, aquí el tercer estrato bien diferenciado), la traducción de las relaciones de comprensión en las de extensión, que permiten las correspondencias precedentes, conduce, en cambio, a la comparación entre el todo y las partes, y por tanto a la cuantificación de la inclusión y, lo que es más interesante, a partir del subestadio IIB, a la toma de conciencia del hecho de que, en los problemas donde se utilizan índices, la relación entre una información global *X* y las elecciones particulares *a, b* ó *c* (si *X*, entonces se puede tener *a* ó *b* ó *c*) equivale a la relación de inclusión entre un todo *B* y las subclases primarias o secundarias *A* y *A'*:

PIT (7;1): después de haber resuelto correctamente la inclusión con las flores (2), se le pide que fabrique un "juego" análogo con las tarjetas. Dispone dos margaritas con dos rosas y tres tarjetas de tres tipos: *"Hay allá dos y dos y allá tres, y después se ha puesto todo* (los reúne en dos totalidades con los otros elementos). — Te haré una pregunta acerca del juego de tarjetas y tú me harás una que se le parezca acerca del juego de las flores: "¿Hay más cuadrados o más formas verdes (= el todo)? — *¿Más*

flores o más margaritas? — ¿Y más cuadrados grandes o pequeños? — *¿Hay más margaritas que rosas?"*

DES (7;5): Las mismas reacciones; después, "a 'más formas verdes', ¿qué le corresponde en el caso de las flores? — *Más flores.* — ¿Y más cuadrados? — *Más margaritas."*

ROG (7;7): "¿Se puede decir que los problemas se parecen un poco? — *Sí, está la rosa además de esto* (las margaritas). *Usted me preguntó si hay más flores o más margaritas. Entonces allá* (tarjetas) *es lo mismo: 'más cantidad de verdes o más de cuadrados', creo.* — ¿En qué se parecen los problemas? — *Porque..., no sé."*

Rog responde bien al problema de abstracción reflexionada, es decir a la toma de conciencia de lo que se hizo, pero no a esta última pregunta, que se refiere a lo "metarreflexivo", es decir, a la estructura abstracta. Los sujetos tampoco aciertan a extraer comparaciones válidas a propósito de la utilización de índices o de las implicaciones (como Tia, de 7;1, en el primer nivel). En cambio, hay sujetos del subestadio IIB (cuarto nivel), que a propósito de los índices responden como sigue:

ALA (9;8): Pájaros-aviones y tarjetas: respecto de los primeros *"no se sabe si era un pájaro o un avión si* (se le dice simplemente que) *los dos vuelan.* — ¿Y en el caso de las tarjetas? — *No se sabía si era éste o ése si se decía* (solamente) *que era grande* (tomó como ejemplo un juego con figuras grandes cuadradas y redondas). — Te voy a hacer una pregunta a propósito de los pájaros y tú hallarás una que se parezca en relación con las tarjetas: Veo algo que vuela y tiene alas. — *Hay algo que es cuadrado* (correcto: los cuadrados pueden ser pequeños o grandes). — Veo algo que vuela y hace ruido. — *Es pequeño* (correcto: sólo hay uno)". En cuanto a las implicaciones, se recuerdan las dificultades de Ala (§ 2); sin embargo, traduce la situación de los relojes al lenguaje de tarjetas por medio de correspondencias exactas: *"Cuadrado grande = todos los relojes de setiembre, cuadrado pequeño = todos los que funcionan mal de los otros meses; redondel pequeño = todos los relojes que funcionan bien; para todos los relojes que funcionan mal = cuadrado.* — ¿Y eso (redondeles pequeños) y esto (cuadrados pequeños)? — *Son los mismos meses* (los que no son setiembre). — Un reloj hecho en mayo, ¿funciona bien o funciona mal? — *No se sabe, es pequeño* (refiriéndose a las tarjetas)". Ala se acerca así, en razón de este hecho, al último de nuestros niveles.

COR (10;6): El juego de los aviones y el de las tarjetas, ¿se parecen? — *Sí: si se dice que es pequeño y verde, no se sabe si es cuadrado o redondo; lo mismo sucede con los pájaros y los aviones."* Correspondencia: "Veo alas. — *Veo que es verde.* — Oigo un ruido. — *Veo que es grande."*

En cuanto al quinto y último nivel, que corresponde al estadio III, las novedades son, por un lado, la capacidad de hacer corresponder los problemas de implicación con problemas análogos imaginados por el niño por medio de las tarjetas (éxito finalmente alcanzado por Ala), pero también, por otro lado, la llegada a un nivel de abstracción que se puede calificar de "metarreflexión" en el sentido de que es la estructura misma del problema lo que el sujeto extrae, y no sólo las analogías de los contenidos:

SAM (9;1) quien, según ya hemos visto en el § 2, usa la expresión formal "solamente si", declara que la inclusión de las tarjetas se parece a la de las flores. "*porque usted preguntó, por ejemplo,* (las relaciones de) *una forma,* (de) *una flor con todo el conjunto*", o sea, la relación de la parte al todo. Se le dan entonces dos tipos de tarjetas cuadradas y redondas preguntándole si tiene más de un tipo que de otro: "Esta cuestión se parece a la de antes. — *No, no del todo: antes usted preguntó por la relación entre una forma y otra, mientras que acá* (inclusión) *habría preguntado por una forma con todo el conjunto.*" Del mismo modo compara el juego de los aviones y el de las tarjetas, como Ala y Cor, pero asimila explícitamente su estructura a la de las relaciones de clases de "*una forma con otra forma*", o para los índices ambiguos de "*un conjunto con una forma*". En cuanto a las implicaciones de los relojes, construye un modelo correcto con las tarjetas, pero no extrae la estructura abstracta.

NOV (13;5), en cambio, compara con precisión la implicación de los relojes con la de las tarjetas y concluye que si todos los relojes fabricados en setiembre funcionan mal (o si todas las tarjetas grandes son cuadradas), mientras que en los otros meses pueden ser buenos o malos (y las tarjetas pequeñas pueden ser cuadradas o redondas), hay entonces una "intersección". Pero ese lenguaje escolar no le impide hacer por sí misma un dibujo muy correcto en el que el sector 1 representa los relojes de setiembre (o los cuadrados grandes), el sector 2, los relojes mal fabricados en otros meses (o los cuadrados pequeños) y el sector 3 los relojes que no funcionan mal (o los redondeles pequeños). Nov descubre por sí misma que la implicación $p \supset q$ puede escribirse, como ya se sabe en lógica, bajo la forma de una disyunción no exclusiva $p \supset q = \bar{p} \vee q = p.q\ (1) \vee \bar{p}.q\ (2) \vee \bar{p}.\bar{q}\ (3)$.

Comprobamos así, en este último nivel, la posibilidad de una metarreflexión, esto es, de una reflexión acerca de los productos ya reflexionados (en el sentido de toma de conciencia de los niveles IIA y IIB) de las abstracciones reflexionantes en tanto procesos. Esta conquista final, nuevo ejemplo de las "operaciones sobre operaciones" que caracteriza al estadio III (comienzo de la lógica proposicional o formal) es muy instructiva en lo que se refiere al propio mecanismo de las abstracciones reflexionantes cuyas grandes líneas se trata ahora de extraer.

§ 5 | CONCLUSIONES. — Los análisis que preceden han vuelto a poner de manifiesto un conjunto de procesos, cada uno de los cuales ya nos era conocido en forma separada: coordinación gradual de la comprensión con las extensiones que se trata de construir, o sea, cuantificación progresiva de los sistemas (regulación del todo y de las partes, etc.), elaboración de las negaciones, construcción de operaciones sobre operaciones, etcétera. Pero la complementariedad de las diferentes pruebas, utilizadas aquí sobre los mismos sujetos, permite discernir la unidad funcional de esos diversos procesos y hacerlo remontar a las relaciones entre la abstracción empírica y la abstracción reflexionante.

En efecto: los tres grandes tipos de conexiones que hemos hallado son la implicación significante, relación esencialmente "intensiva" (comprensión)

cuyo carácter elemental explica la relativa facilidad de la utilización de índices (§ 3), la inclusión de las clases, relación cuantificada (extensión) construida desde el estadio II, y la implicación proposicional. Ahora bien, el primero de estos tres tipos de relaciones parece, en su mayor parte, dominado por la abstracción empírica, mientras que los otros dos constituyen los productos de abstracciones reflexionantes sucesivas, y se trata entonces ahora de determinar las razones de esa evolución.

1) La implicación significante supone el reconocimiento en el objeto, de la existencia de propiedades cualitativas, significativas para el sujeto, y el discernimiento, entre ellos, de lazos suficientemente constantes para permitir inferir la presencia de una a partir de la percepción de la otra.

Naturalmente, en ocasión de tales comprobaciones o coordinaciones inferenciales, el sujeto está muy lejos de mantenerse pasivo, porque sin cesar efectúa asimilaciones, fuente del establecimiento de relaciones; y porque activo, podrá, en adelante, extraer de esas actividades lo necesario para construir las extensiones, las negaciones, etcétera. Sin excepción alguna, toda abstracción empírica supone pues, como en este caso, un marco instrumental necesario para su realización, y que es él mismo extraido, por abstracción reflexionante, de actividades anteriores más simples (o más cercanas a las condiciones biológicas). Pero en el caso de las implicaciones significantes iniciales y considerándolas en relación con las inclusiones e implicaciones ulteriores, es difícil poner en duda que las características de los objetos asimilados como significativos por el sujeto, corresponden a propiedades que, aunque en sí mismas no son alcanzadas de manera efectivamente objetiva, existían, empero, en esos objetos sin que el sujeto las haya introducido en ellos, es decir, sin que esas propiedades se dedujeran del marco instrumental necesario para su registro. Decir, por ejemplo, que una tarjeta es "verde" supone comparaciones, clasificaciones, etcétera, pero no se extrae de ello el hecho observable de que esa tarjeta es verde, mientras que la relación según la cual el todo es más grande que la parte se impone tarde o temprano en virtud de la lógica interna del marco instrumental (transformado en operatorio), aunque el sujeto se oponga en principio a toda comprobación de ese tipo ("¡más margaritas!"). En cuanto al lazo entre una propiedad significativa y la propiedad que ella implica, sólo se trata, también, de un lazo sobre todo empírico (o "legal") y no deductivo sino analítico (cuadrado ⊃ cuatro lados), esto es, de una generalidad que depende de comprobaciones anteriores, y no necesaria (cf. el ejemplo clásico de "cisne implica blanco", hasta el descubrimiento de los cisnes negros en Australia).

Es entonces el papel preponderante de la abstracción empírica en las implicaciones significantes lo que explica sus limitaciones, puesto que en ellas las actividades del sujeto se mantienen más reducidas que en el caso de las relaciones ulteriores.

La primera de estas limitaciones se vincula con la naturaleza esencialmente cualitativa de las significaciones iniciales, que proceden por simple "comprensión"; de ahí la falta de "extensiones" y de su cuantificación. La

razón es que sólo la cualidad es dada, mientras que toda cantidad debe ser construida (ni siquiera los términos aparentemente cuantitativos como "pequeño" y "grande" son al principio algo distinto de dos predicados absolutos, antes de la relativización y la medición progresivas necesarias para su cuantificación).

La segunda limitación de los sistemas primitivos de significación es la ausencia de negaciones, salvo en los casos de expectativa frustrada o de inferencias desmentidas por los hechos. Pero en esos dos casos la negación es impuesta desde afuera: lo que todavía falta es la negación construida por el sujeto (*no-a* en relación con *a*, etc.) y cuyo papel es en parte asumido por la simple relación de diferencia. En efecto: una propiedad tal como "no verde" no es una propiedad inherente al objeto, el cual, si no es verde, será amarillo o azul, etcétera, mientras no se lo compare con otros según una estructura de clasificación, de tal modo que el carácter general "no verde" sólo adquiere sentido en relación con clases en extensión. La inicial carencia de negaciones (*) parece, pues, ir a la par con la de las extensiones y las cuantificaciones, como lo muestra el caso de las clases secundarias o complementarias de A bajo B, etc, siendo, por lo demás la negación necesaria para su construcción y recíprocamente.

2) El problema que se plantea es, entonces, comprender por medio de qué construcciones el sujeto va a superar el estado inicial para llegar a las estructuras de inclusión con cuantificación del todo y elaboración de las clases complementarias o secundarias: ¿se trata de construcciones exteriores ajenas a todo lo que precede o construcciones debidas a la abstracción reflexionante, es decir, impuestas por las reorganizaciones que se han vuelto necesarias por el solo hecho del paso de las actividades en juego, de un nivel inferior de partida a un nivel superior de llegada? En el segundo caso, la reorganización constructiva sólo utilizaría en el punto de partida materiales extraídos de lo que precede, enriqueciéndolos por recombinación, mientras que en el primer caso las nuevas construcciones apelarían a elementos no dados hasta ese momento e introducidos desde afuera, además de la adquisición anterior.

Notemos, en primer lugar que hay paso de un nivel de actividad mental a otro, es decir, reflexión en el sentido de un poder reflector (hablamos en ese caso de "reflejamiento"), siendo este reflejamiento diferente de la reflexión en tanto reorganización cognitiva, consciente o inconsciente. El reflejamiento consiste aquí en un paso del reconocimiento en presencia del objeto a la evocación o representación posible en su ausencia. En efecto: la implicación significante nada supone además del reconocimiento por asimilación a un esquema de acción, y cuando una significación engendra otra, nada más que la comprobación de esa relación o la del esquema que la supone (por ejemplo extraer un soporte para alcanzar el objetivo), conservación que puede seguir siendo motriz sin evocación representativa. Con los progresos de la función

(*) Véase respecto de este tema la obra acerca de la contradicción (vol. XXXI y XXXII de los *Etudes*).

semiótica (*), en cambio, el reconocimiento se puede desdoblar con evocaciones, o representaciones de los objetos actualmente no percibidos, y éstas confieren *ipso facto* cierto conocimiento de las extensiones, lo que no significa aún su regulación, sino simplemente su existencia para el sujeto.

A este reflejamiento en el plano de las evocaciones extensionales va a corresponder una reflexión reorganizadora, y es aquí donde comienzan las dificultades, pues la conciencia de extensiones de diversos órdenes en modo alguno implica aún su estructuración en cuantificaciones y negaciones, es decir, la construcción del sistema de las inclusiones.

Ahora bien: las reacciones ante los problemas de utilización de índices (§ 3) parecen mostrar de modo decisivo que esta estructuración no es agregada desde afuera, sino que resulta de una reflexión sobre las relaciones ya establecidas en comprensión, y que se trata, desde ese momento, de traducir uno a uno en términos de extensión (lo que no es nada simple, sino que recurre a factores exteriores o ajenos a lo que precede). Así es fácil extraer en comprensión las cualidades comunes a varios objetos: la traducción en extensión es en este caso el "todos" cosa que ya en el § 3 indican los sujetos Cat y Bar ("son todos verdes"), mientras que, siempre en comprensión, las subclases son denominadas mediante las expresiones "(entonces puede ser) así o así" (Ast), "un cuadrado pequeño *o* un redondel pequeño" (Cos), etcétera. ¿Por qué pues, si la integración de las partes en el todo o la desintegración del todo en partes parecen tan fáciles en sus formas implícitas, las cuestiones de cuantificación de la inclusión ($A < B$) son más complicadas?

Hay para ello, cuatro razones, que, por lo demás, permiten comprender por qué la abstracción reflexionante constituye una fuente de novedades y no sólo la transposición de un nivel a otro (reflejamiento). La primera es que, en reacciones instantáneas, el sujeto parte de nexos en comprensión y sólo después los traduce en términos de extensión, mientras que en los problemas de inclusión se procede directamente sobre las extensiones para hacerlas comparar en más o en menos. Ahora bien, hay una diferencia más notable de lo que es en apariencia, pues partir de las extensiones es considerarlas inmediatamente como objetos estables del pensamiento, o sea tematizables, y ya no solamente como un derivado inferencial momentáneo de la comprensión. En segundo lugar, para tematizar esas extensiones hace falta un instrumento de asimilación y de comparación que permita considerarlas como cantidades: hemos visto (§ 4, segundo nivel) que esta condición era satisfecha por el paso de la correspondencia cualitativa (= semejanza entre las propiedades comunes de los objetos) a una correspondencia de figura u óptica, término a término, es decir, una correspondencia prenumérica (sin conservación) que se refiere a los objetos individuales como tales, lo que permite la evaluación cuantitativa (más, igual o menos) de sus uniones como extensión de las clases. En tercer lugar, esta puesta en correspondencia no basta, pues de por sí sólo conduce a comparar clases disjuntas: es necesario un esfuerzo suplementario para llegar a comprender que el problema de la inclusión es el establecimiento de una relación no entre una subclase A y otra subclase, sino

(*) No vamos a describir de nuevo aquí las condiciones de su desarrollo que se vinculan, en primer lugar, con la interiorización de la imitación, de donde resulta igualmente un proceso de "reflejamiento".

entre la subclase *A* y la clase total *B*; ahora bien, para captar este problema en tanto tal y en forma previa a la búsqueda de su solución, hay que llevar el análisis hasta un grado de abstracción consciente (es decir reflexionada además de reflexionante) que permita distinguir las diversas cuestiones y las diversas relaciones. En efecto: hemos visto en el § 4 que esta capacidad se adquiere (tercer nivel, casos de Pil, Des, Rog, etc.) una vez resueltos los problemas de inclusión, y eso muestra que este logro suponía una comprensión "reflexionada" del problema como tal.

Pero las tres novedades que acabamos de describir sólo se refieren todavía a las condiciones preliminares de la solución del problema de la inclusión. La condición central es, como hemos insistido desde la lejana época en que abordamos el problema, que el todo B, una vez disociado en subclases *A* y *A'* de modo que permita la comparación requerida, no deja de existir como totalidad, sino que se conserva como tal a pesar de su parcelamiento: de ahí $A = AB = B - A'$ y $A' = A'B = B - A$. Ahora bien: esta conservación no es del mismo tipo que la de un conjunto en el que se modifica la disposición de las partes y donde basta comprender que lo que se agrega en un punto se quita en otro. Supone, por cierto, también una resta en tanto operación inversa ($B - A = A'$ en relación con $A + A' = B$), pero esta resta implica dos condiciones más profundas: una negación parcial, o complementariedad, bajo *B*, tal que los *A'* sean comprendidos como los *B no-A* y los *A* como los *B no-A'*. Ahora bien: en la actualidad conocemos el carácter tardío y las dificultades de la negación, al punto de que los sujetos preoperatorios, dominados por la imposición de las afirmaciones prefieren admitir, para intentar conservar el todo, que, una vez disociado en *A* y *A'*, se identifica con el "resto" *A'* (las rosas del § 1 se transforman en "las flores") o a veces con la parte más numerosa *A* (véase Bar en el § 1).

En resumen, la condición más importante de la regulación de las extensiones y de la constitución de la inclusión es que lo que se concebía como simples "diferencias", entre las cualidades de los objetos en comprensión, sea promovido al rango de negaciones que compensan exactamente las características positivas de los objetos y de las clases. Ahora bien: esta novedad nada tiene de una creación *ex nihilo*: es abstraída en su raíz de las diferencias u oposiciones cualitativas propias de las significaciones en comprensión y es solidaria de todo el proceso conjunto de establecimiento de correspondencias entre las comprensiones y las extensiones. En una palabra, la abstracción reflexionante que conduce de la implicación significante a la inclusión es ciertamente una fuente de construcciones esencialmente nuevas en el sentido de no preformadas, pero esas novedades resultan de la "reflexión" reorganizadora que el "reflejamiento" de los datos ya adquiridos en el nivel inferior vuelve necesaria, y que se trata de reconstruir con nuevos términos, propios del plano superior.

3) Queda nuestro problema central: la construcción de la implicación proposicional a partir de la inclusión. Ahora bien: en este paso volvemos a descubrir —lo cual resulta instructivo— los mismos procesos que en el que conducía de las significaciones cualitativas a las inclusiones.

Hay, en primer lugar, un cambio de niveles de actividad mental que obliga al sujeto a efectuar trasposiciones o "reflejamientos". La inclusión se

construye en el nivel de los "agrupamientos" de clases y relaciones, esto es, en el nivel de las operaciones "concretas" que se refieren directamente a los objetos. La implicación proposicional, al igual que las otras operaciones de la lógica proposicional (tanto en sus formas "naturales" como en las axiomatizadas), se refiere a enunciados que, naturalmente, pueden ser asimismo concretos, pero que también pueden ser verbales (como en nuestros problemas de implicación) y en ambos casos deben considerarse como hipótesis cuyo contenido no es puesto en discusión y de las que se trata de extraer, aunque exclusivamente por la forma, consecuencias necesarias. Ahora bien: algunas de estas formas intervienen naturalmente ya en el nivel de las operaciones concretas, pero permaneciendo subordinadas a las consideraciones de contenido y limitadas por ellas: se trata, pues, en el nivel proposicional, de extraerlas de las reacciones precedentes y trasponerlas por "reflejamiento" al plano de los enunciados hipotéticos generalizándolas por medio de la "reflexión" reorganizadora.

Esta trasposición reflectiva engendra entonces las cuatro transformaciones siguientes, que corresponden a las que acabamos de describir en el paso de las significaciones en comprensión a las extensiones cuantificadas y a las inclusiones. La primera es una tematización de la forma, cuyas diversas conexiones provienen de los objetos de pensamiento y no simplemente de los instrumentos de transformación. Esta tematización es muy visible en cualquier prueba de razonamiento formal: por debajo de los 11-12 años el sujeto discute permanentemente las hipótesis dadas como punto de partida, y en el caso de los relojes dirá, por ejemplo, que los relojes fabricados en septiembre probablemente no todos funcionen mal porque no se los ha examinado a todos ("no se los puede tirar antes de observarlos, quizás haya alguno que funcione bien", Ray 8;6). En el nivel formal, por el contrario, el sujeto se atiene a la hipótesis propuesta y su única tarea consiste en analizar cuidadosamente la forma: "se ha dicho *todos* los de septiembre", etcétera.

En segundo lugar, para analizar los enunciados verbales por oposición a la inspección simplemente perceptiva de los objetos concretos, se necesitan instrumentos de comparación que cumplan un papel análogo al de las correspondencias término a término que sucedían a las correspondencias cualitativas en el momento de la formación de la inclusión. Estos nuevos instrumentos tienen naturalmente como fuente los del nivel anterior, es decir, los cuantificadores "todos" "algunos", "uno" y "el mismo", pero cuando se los aplica a los enunciados verbales y ya no directamente a los objetos, adquieren un rango superior de cuantificadores proposicionales cuyo empleo no tiene nada de inmediato y demanda un largo ejercicio: prueba de ello es el hecho muy general y citado en repetidas oportunidades en el § 2 (véanse todos los casos del nivel IIA y las instructivas dudas de Ala, Far, y Dan en el nivel IIB hasta los 10-11 años) según el cual, "todos los relojes de septiembre funcionan mal" significa "todos los que funcionan mal fueron fabricados en septiembre". Los cuantificadores proposicionales son, pues, psicológicamente muy diferentes de los mismos cuantificadores aplicados a los objetos presentes y suponen el establecimiento de correspondencias o de no-correspondencias entre términos individuales simplemente evocados por designaciones verbales; de ahí la interpretación: los relojes mal fabricados son más numerosos que los del mes del septiembre, etcétera.

En tercer lugar, esta tematización de las formas y ese establecimiento de correspondencias (o de no-correspondencias) exigidas por los cuantificadores proposicionales involucra una reflexión (que conduce hasta las abstracciones "reflexionadas" e incluso "metarreflexivas" descriptas en el último nivel del § 4) suficientemente sistemática para referirse a todos los ajustes posibles, y ya no sólo a los que se construyen de a poco en el seno de los "agrupamientos" concretos: de ellos resulta entonces una construcción del "conjunto de las partes", es decir una combinatoria que vincula todos los términos que operan en los enunciados.

Por último, —y esta cuarta novedad es tan fundamental en el caso de la implicación como en el de la inclusión—, las tres transformaciones precedentes exigen como condición de su equilibración una refundición y una generalización de las negaciones, complementarias de todas las afirmaciones en juego y necesarias para su regulación por compensaciones sistemáticas. En particular para el conjunto de las partes, a cada combinación entre ellas le corresponde una parte negativa: en una tabla de cuatro asociaciones básicas, α, β, γ y δ (como pq, $\bar{p}q$, $p\bar{q}$ y $\bar{p}\bar{q}$), no-$\alpha = \beta\gamma\delta$, no-$\alpha\beta = \gamma\delta$, no-$\alpha\beta\gamma = \delta$, etcétera (de donde se obtienen las 16 operaciones binarias con sus negativas).

De ello resulta en el caso de la implicación, que la negación corresponde a una complementariedad total y no a una complementariedad con la clase más cercana, como en la inclusión, donde, si $A \subset B$ entonces $A' = B$ *no-A*. En efecto: la negación de $p.q$ bajo $p \supset q$ es $\bar{p}.q \vee \bar{p}\bar{q}$ y no solamente $\bar{p}q$, cosa que el sujeto Nov (§ 4), de 13;5, muestra explícitamente en su esquema disyuntivo (intersección) de la implicación. De esta generalización de la negación, resulta, además, que los sujetos del nivel en que se domina la implicación comprenden igualmente la ley de dualidad debida a de Morgan, como ya hemos visto anteriormente con B. Inhelder (*): Si A está incluido en B, entonces *no-B* lo está en *no-A* (del mismo modo, $p \supset q = \bar{q} \supset \bar{p} = \bar{p}\bar{q} \vee \bar{p}q \vee pq$).

4) Vemos de esta manera que la abstracción reflexionante que apunta a la implicación es fuente de novedades reales no contenidas en las estructuras limitadas de inclusión propias de los "agrupamientos" de clases, del mismo modo que éstas son más ricas que las implicaciones significantes cualitativas de las cuales son extraidas. Y, sin embargo, los elementos de que se componen estas construcciones nuevas están extraídos de las estructuras anteriores, pero sin que por ello las estructuras superiores estén preformadas en las precedentes. Por cierto, es fácil hablar, en tales casos, de síntesis o combinaciones nuevas a partir de componentes ya conocidos. Pero una noción como la abstracción reflexionante sólo podría tener valor a condición de reemplazar fórmulas tan vagas por un modelo detallado. Aún no hemos llegado a eso, pero podemos hacer algunas observaciones.

(*) Eso es así a propósito de los conceptos, poco estructurados, en juego en las clasificaciones cualitativas, en oposición con las estructuras más formales, porque en los agrupamientos la forma permanece ligada al contenido.

La primera es que las relaciones entre el reflejamiento y la reflexión deben ser concebidas como de estrecha continuidad, a pesar de su distinción: trasponiendo una estructura de un plano inferior a uno superior, el reflejamiento le da un nuevo contenido (crea, por tanto un nuevo morfismo), lo que equivale a generalizarla un tanto, mientras que el papel inicial de la reflexión es sólo reconstruirla o reconstituir en un nuevo plano, lo cual equivale a prolongar el reflejamiento.

Ahora bien: lo propio de las generalizaciones debidas a la abstracción reflexionante —y es ahí donde se sitúa el problema— es que las formas generales así construídas son más ricas que las particulares, mientras que lo general obtenido por abstracción empírica es más pobre en comprensión que lo particular, porque se refiere a un contenido de mayor extensión y en consecuencia, a propiedades comunes más restringidas.

Pero la razón es, sin duda, simplemente que la reflexión reorganizadora, al tener que prolongar el reflejamiento, debe englobar el contenido y la forma del nivel anterior en el nuevo contenido extendido en el plano superior y en la nueva forma que se trata de adaptar a él: para reconstituir las antiguas formas en el nuevo nivel, es necesario construir una forma de formas, lo que constituye el principio de estos enriquecimientos (y es tan visible en el desarrollo histórico de las estructuras lógico-matemáticas).

Lo propio de la abstracción reflexionante es, pues, conducir necesariamente a la construcción de operaciones sobre operaciones, pero con la particularidad de que las nuevas no son cualesquiera sino que prolongan a las precedentes de manera diferenciada. Desde este punto de vista los cuatro tipos de novedades señalados en el paso de las significaciones cualitativas a las inclusiones en extensión, y, después, de éstas a las implicaciones proposicionales, pueden interpretarse como sigue:

1) La tematización de las anteriores conexiones, que, de ser instrumentos inconscientes y transformaciones, se convierten en objetos de pensamiento, se vincula con la suma iterativa de los actos de reflexión, los que de reflexionantes son promovidos después al rango de reflexionados y, después, al de metarreflexivos en diversos grados.

2) El empleo generalizado de las correspondencias (o no-correspondencias) término a término, sólo se debe a un paso de la correspondencia cualificada a la correspondencia en extensión, y, después, de ésta en su forma concreta a sus formas verbales (simples enunciados en términos de cuantificadores proposicionales).

3) El conjunto de las partes es la forma final del análisis de las conexiones propias, ante todo, de toda clasificación, y, después, de la "clasificación de todas las clasificaciones" posibles para un contenido determinado (por lo tanto, aquí con paso a la segunda potencia.).

4) La generalización de las negaciones es la resultante, en términos complementarios, de las conexiones aditivas en juego en el proceso precedente (en 3).

En síntesis, las operaciones nuevas, cuya construcción es provocada por la abstracción reflexionante, no son el producto de un recurso a lo exterior, sino que constituyen, en cada caso, la prolongación de lo que es abstraído del nivel anterior.

CAPÍTULO VI

La formación de los correlatos

EN COLABORACIÓN CON J. MONTANGERO Y J.B. BILLETER

Los correlatos en el sentido de Spearman constituyen especies de proporciones cualitativas, por tanto relaciones de relaciones, pero sin la igualdad de los productos cruzados: por ejemplo, las plumas son a los pájaros como los pelos a los mamíferos terrestres. Desde el punto de vista de los agrupamientos, el correlato aparece como una operación multiplicativa que consiste en hallar el cuarto casillero de una tabla de doble entrada de cuatro clases o relaciones. Pero el correlato es más especial, pues apunta a alcanzar relaciones entre propiedades intrínsecas de los objetos, mientras que en una multiplicación cualquiera de clases, tales como (cuadrados + redondos) x (blancos + rojos), facilmente accesible desde los 7 años, el hecho de que los cartones cuadrados o redondos puedan ser blancos o rojos es contingente y sólo depende de la elección arbitraria del clasificador.

Pero si las plumas constituyen una característica objetiva de los gorriones, como lo son los pelos para el perro, resulta claro que la construcción del correlato debe comenzar por una abstracción empírica, es decir, dirigida a la captación de propiedades que no son introducidas por el sujeto en los objetos, sino que existen en ellos antes de las comparaciones buscadas. Por el contrario, cuando el correlato da lugar a cuantificaciones y conduce al más importante de sus derivados, que es la noción de proporción (2 es a 4 como 3 a 6), nos las vemos únicamente con construcciones del sujeto, es decir, con un dominio que depende de la abstracción reflexionante. Sin embargo, por "físicas" que sean las propiedades intrínsecas de los objetos que los correlatos tienden a poner en relación, de todos modos, la elaboración misma de las relaciones supone igualmente una actividad del sujeto y, para explicar su progreso, se presenta el problema de determinar si esas relaciones sólo se adquieren por una sumatoria de informaciones extraídas de su contenido empírico o si

requieren la fabricación de una "forma" que sobrepasa al contenido y necesaria para su interpretación: en este caso, ¿de dónde es abstraída la forma, en sus diferentes etapas, sino de actividades más simples del sujeto y con reorganizaciones en cada nueva etapa? Volvemos a enfrentar, pues, aquí, cuestiones atinentes a la abstracción reflexionante, y el interés del estudio de los correlatos reside entonces en el hecho de que exige un análisis de las relaciones entre las respectivas contribuciones de la abstracción empírica y de la abstracción reflexionante.

La técnica adoptada consistió en presentar primero un conjunto no ordenado de dibujos que podían ser reunidos por parejas y después por cuaternas multiplicativas y correlatos. Tras haber pedido que se precisara el sentido de cada dibujo (un perro, un barco, una aspiradora, etc. y pelos, una pluma, un timón de barco, un enchufe, etc.) se solicita "poner juntos los dibujos que parecen ir bien juntos". Casi siempre el niño construye entonces parejas. Una vez hecho esto, se le pide al sujeto que reúna de a dos esos pares para formar conjuntos de a cuatro: "los cuatro deben ir bien juntos", y se le pregunta a continuación el porqué de esas aproximaciones.

Si el sujeto no descubre inmediatamente los correlatos (el problema precedente puede conducirlo a eso, pero no necesariamente), se lo prepara para hacerlo pidiéndole que precise las relaciones: "¿Qué es lo que le permite al pájaro no tener frío en invierno? — Las plumas." Si entonces no coloca inmediatamente, frente por frente al perro y sus pelos, se coloca al perro encima del pájaro preguntándole por el cuarto lugar: "¿Qué iría bien aquí? Falta algo que es para el (3) como el (2) es para el (1)." Si de este modo el niño no llega a construir el correlato, se le ofrecen tres dibujos para que elija para el término 4. Si se descubre el correlato, se proponen entonces contraejemplos:Una casilla, ¿quedaría tan bien como los pelos? ¿O (en el caso de bicicleta-manubrio y barco-timón) un timbre o un inflador quedarían tan bien como el manubrio? Y si se pone el timbre, ¿qué elegir para el barco (una sirena)? etcétera.

En algunos sujetos se han presentado matrices multiplicativas hechas a propósito para ver cómo el niño analiza las relaciones. A los grandes se les pidió además una comparación entre los correlatos, bien construidos, y proporciones tales como 2/4 = 3/6, etcétera.

§ 1 | EL ESTADIO I. — Salvo algunos casos avanzados, los sujetos del nivel preoperatorio de 5-6 años fracasan en el intento de obtener los correlatos, aunque, en raras ocasiones, pueden esbozar algunas formas momentáneas. Estos sujetos merecen un examen atento respecto de dos problemas importantes: ¿en qué consisten las relaciones elementales que establecen entre los objetos y en qué circunstancias esbozan relaciones de relaciones?

Veamos en primer lugar un caso de nivel IA:

COU (5;3) a veces construye pares según pertenencias objetivas: manubrio - bicicleta; timón - barco; pero también según semejanzas de figuras: aspiradora - barco "*porque se parece a un barco*"; contigüidades como: barco-pájaro "*porque el pájaro a veces está en el lago*"; relaciones causales ocasionales: aspiradora-pluma "*porque la aspiradora aspira la pluma y porque el pájaro a veces se oculta atrás*", etcétera Cuando se intenta hacerle comprender el principio de una matriz de dos pares se obtienen vinculaciones del mismo tipo. Por ejemplo, para 1-2 timón-manubrio encima de 3-4 barco-bicicleta, Cou une con una diagonal timón con bicicleta: "*hay cosas que giran y* (otra diagonal) *y otras que no.* Se separan entonces las dos columnas verticales

1-3 y 2-4: vincula bicicleta con barco, "*porque está a la orilla del agua*". Una semana después, Cou cuenta lo que recuerda: "*Había, plumas con el pájaro, y el enchufe, que iba con la aspiradora*" y "*Estaba la cacerola, que iba con la tapa y un horno con la cacerola*". En cuanto a la prueba conocida de llenar el cuarto casillero de una matriz, se obtiene, para (1) pájaro (2) pluma y (3) perro, la siguiente respuesta en relación con el casillero (4): "*una cuerda para atar al perro*", y cuando se le ofrece para que elija un auto, los pelos o la aspiradora, Cou elige el auto "*porque a veces el perro va en auto*". Es obvio que el fracaso en las tentativas de establecer correlatos es casi sistemático, pero con la excepción de dos bosquejos momentáneos que se deben tener muy en cuenta: es la relación del manubrio con la bicicleta comparada con el timón del barco "*porque uno es el volante de la bicicleta y el otro, el del barco ... sirve para conducir ... el volante es lo que se maneja, el manubrio es lo mismo*"; la otra, es la relación corcho-botella y tapa-cacerola "*porque hay algo que salta de la cacerola*" y hay que taparla. Pero sólo se trata de vinculaciones momentáneas sin correlato estable: un horno podría reemplazar a la tapa de la cacerola "*porque a veces se la calienta en el horno*", etcétera.

Un nivel algo superior al precedente y que se puede denominar IB es aquel en el que el sujeto se esfuerza por fundar las parejas en relaciones objetivas pero sin llegar a tener éxito en las pruebas de matrices ni en los correlatos.

CAN (5;8) construye sus parejas de manera regular: aspiradora-enchufe, "*si no, no se puede aspirar*"; manubrio-bicicleta "*para doblar*"; timón-barco "*para manejar el barco*"; auto-nafta "*para poder andar*"; pájaro-pluma "*si no, no puede volar*" y perro-pelos "*si no, tiene frío*". Excepto esta última justificación, todas hacen referencia a una puesta en marcha o a una dirección. De todos modos, no se acierta con ninguna de las matrices o relaciones de relaciones: Can alínea auto-nafta al lado de bicicleta-manubrio: "*Esta es una bicicleta y éste es un auto: los dos son para andar por la carretera*". Para pájaro-pluma sólo acepta perro-pelos, pero "*porque el perro se come al pájaro: quedan las plumas* (muestra plumas y pelos como residuos de ese festín)". "Encuentra algo para la cacerola como el corcho lo es para la botella. — (Da vuelta la botella sobre la cacerola). *Se pone el vino en la cacerola*".

FRA (6;0), las mismas reacciones, pero acierta al unir cacerola-tapa con botella-corcho: "*una tapa para que no se derrame*".

MER (6;8) reúne conjuntos de cuatro, pero entreviendo sólo por instantes las relaciones de relaciones: alínea manubrio-bicicleta barco-timón "*porque uno es para que el barco avance y el otro para una bicicleta, para tenerse si se quiere doblar*"; solamente en la serie: "*Aquí* (manubrio-bicicleta) *van juntos y allí* (timón-barco) *van juntos*", pero la unidad de las dos parejas reside en que "*si se pone aquí* (barco con bicicleta) *se dirá que la bicicleta va por el agua;* se podría además reemplazar el timón por la chimenea. Del mismo modo se asocia botella-corcho con cacerola-tapa, pero poniendo el horno en lugar de la tapa, "*es lo mismo...* (es) *para cocinar*".

Como se indicó al comienzo de este capítulo, los correlatos consisten en desenvolver relaciones entre relaciones basadas en las propiedades intrínsecas de los objetos comparados. ¿Pero qué son esas propiedades en el nivel preoperatorio? Todas ellas presentan la característica fundamental de permanecer a mitad de camino entre lo observable en el objeto y las actividades del

sujeto: los objetos no solamente son definidos, como lo ha señalado Binet, sino también concebidos en términos de utilización y de finalidad ("es para"), el cual durante largo tiempo se mantiene solidario de una base de artificialismo y animismo. Por eso sus propiedades continúan siendo esencialmente variables y no se las puede insertar en un marco fijo de clases y de sub-clases: de ahí la libertad que se toman los sujetos del nivel IA que como Cou relacionan cualquier elemento con cualquier otro porque siempre se puede suponer una actividad finalista que los vincule. En los sujetos del nivel IB las parejas son más regulares, porque se basan todas ellas en un "es para" predominante, pero la libertad o, mejor dicho, la arbitrariedad de otras finalidades más ocasionales, reaparece cuando se trata de vincularlas entre sí.

Estos hechos resultan bastante instructivos en cuanto a las relaciones entre la abstracción empírica y la abstracción reflexionante: parecen mostrar ya (cosa que la serie confirmará) que si una abstracción empírica objetiva, es decir, atinente a los caracteres intrínsecos de los objetos, es tenida en jaque por las relaciones subjetivas en tanto debidas al sujeto egocéntrico, podrá, en cambio, afirmarse en la medida en que se apoye en marcos clasificatorios estables, es decir en una actividad del sujeto epistémico con su capacidad de abstracción reflexionante.

En los pormenores, equivale a decir, sin duda, que si en estos niveles primitivos no hay construcción de relaciones de relaciones, esto es de "formas de formas", se debe a que aún no hay relaciones elementales estables (de 2 y no de 4 términos), ni, por tanto, "formas" simples que se puedan expresar en términos de clases estables. Cuando Mer, de 6;8, parece alcanzar el correlato manubrio-bicicleta = timón-barco, o sea, 1-2 = 3-4, porque 1-2 "van juntos" y 3-4 también, procura justificar el vínculo introduciendo una nueva conexión 2-4, esta vez arbitraria: "la bicicleta va sobre el agua (sobre el barco)", lo cual destruye naturalmente el ordenamiento de las precedentes. Del mismo modo, para Can, pájaro-pluma (1-2) = perro-pelos (3-4), pero por medio de una relación artificial 1-3 "el perro se come al pájaro", etcétera.

De todos modos, en medio de esta proliferación subjetiva de los contenidos sin "formas" estables se ve asomar, en ciertas situaciones (desde el caso primitivo de Cou), un esbozo momentáneo de correlatos, aún no basado en clases, sino en la imposición de un esquema de acción más resistente que los otros: manubrio-bicicleta y timón-barco van juntos porque "sirven para conducir" y corcho-botella con tapa-cacerola porque sirven para tapar.

§ 2 | EL NIVEL IIA.— El estadio II que, en promedio, se extiende desde los 7-8 a los 10-11 años, nos resulta muy conocido desde el punto de vista de las actividades clasificatorias del sujeto: en un primer nivel IIA hay construcción simultánea de las clasificaciones simples y de la matrices pero sin acabamiento de las cuantificaciones necesarias (como la de la inclusión), mientras que en IIB hay acabamiento y equilibración. En lo que se refiere a los correlatos (caso particular de las matrices pero basado en las propiedades intrínsecas de los objetos y ya no en las distribuciones clasificatorias elegidas a voluntad), veremos que ocurre lo mismo: en IIA, logro de las relaciones de relaciones por tanteos y todavía sin clara exclusión de los contraejemplos,

pero en función de relaciones elementales que se vuelven estables por la inserción en marcos de clasificación. El progreso en IIB es, entonces, ante todo, de consolidación, todavía con tanteos pero con rechazo de los contraejemplos. Veamos algunos ejemplos del nivel IIA comenzando por tres casos intermedios:

BOL (6;6) construye sus parejas: jeringa-enfermera, *"la enfermera usa la inyección"*; después toma al peluquero e intenta ponerlo al lado de otro dibujo *"busco un lavatorio. Así no va"*; neumático con auto *"el auto usa neumáticos; la tele usa el enchufe, el manubrio va en la bicicleta"*, y esta vez *"las tijeras con el peluquero; él corta los cabellos, la enfermera da inyecciones"*. Se le pide entonces que siga asociando las parejas en grupos de cuatro: une barco-timón con bicicleta-manubrio, siendo los segundos términos de cada pareja *"para manejar"*. — ¿Y un inflador de bicicleta al lado de la bicicleta? — *Sí, para inflar.* — ¿Qué queda mejor? — *El manubrio es lo más importante"*. Pero vuelve después al nivel IB.

CHO (6;11): las mismas reacciones iniciales y el mismo grupo de cuatro. "¿Cuáles irían con pájaro-plumas? — *Perro-pelos, porque sus plumas son para cubrir un pájaro, y los pelos para cubrir al perro. Las plumas son los pelos de un pájaro"*. Del mismo modo, auto-nafta y aspiradora-enchufe, porque sin la nafta *"el auto se detiene.* — ¿Y sin el enchufe? — *La aspiradora no anda"*. En cambio, después de poner el peluquero debajo de la enfermera, no encuentra correspondencia para la jeringa: "¿Y las tijeras? — *No, la enfermera no corta nada"*. Halla, incluso, el correlato oreja-radio y ojos-televisión y rechaza asociaciones entre algunas parejas, porque *"todo es diferente"*.

ROL (6;4) asocia pájaro-pluma con perro-pelos *"porque si no tiene pelos, tendrá frío, y el pájaro si no tiene pelos, ¡pero!, plumas, también tendrá frío"*. Del mismo modo, barco-timón va con bicicleta-manubrio: "¿Y si se pone un timbre en lugar de un manubrio? — *Sí, porque el barco tiene a veces una... música* (sirena). — Pero si se deja el timón, ¿qué es lo que va mejor para la bicicleta? — *El manubrio, va con el volante del barco"*. Se retoma la cuaterna perro-pájaro: "¿Y si se pone una casilla en lugar de los pelos? — *Está bien, pero al pájaro habría que ponerle un nido.* — Y si en lugar de un perro se pone un bebé, ¿qué hay que poner allá (bajo el nido)? — *Un biberón.* — ¿Como la casilla? — *Entonces el bebé y después la cama"*.

Veamos ahora casos claros del nivel IIA:

MAG (6;9) construye las parejas sin dificultades. "¿Puedes poner junto a estos dos (perro-pelos) otros dos de manera que los cuatro queden bien en conjunto? — (Pone pájaro-pluma). *Porque son dos animales"*.. — ¿Y esto (pelos-pluma)? — *Es lo que hay sobre los animales.* Acierta también en el caso de cacerola-tapa, etcétera.: *"Porque los dos son para poner agua* (cacerola-botella). — Y esto. — *Es para tapar arriba"*. De igual modo con barco-timón y bicicleta-manubrio, pero está de acuerdo en reemplazar éste por un inflador de bicicleta *"para inflar los neumáticos.* — ¿Cuál queda mejor? — *Los dos.* — ¿El inflador va con el timón? — *No, el manubrio para los dos"*.

CYN (7;6) forma las parejas habituales. "Será posible poner cuatro juntos, vincularlos de a dos en dos? — *Sí* (pone en línea bicicleta-manubrio y auto-inflador) *porque los dos son vehículos"* pero renuncia a hacerlo por la falta de relación entre el manubrio y el inflador. Alínea entonces perro-pelos y pájaro-plumas *"porque son animales*

y eso es lo que abriga a los animales". Acierta, también con los ojos y las orejas para la televisión y la radio, etcétera, pero cede a la contra-sugerencia cuando se quiere reemplazar los ojos por un enchufe.

LOS (7;3) junto a sus parejas introduce relaciones de utilización y pone en relación algunos elementos porque pertenecen a una misma clase: pájaro y perro *"porque los dos son animales"*, pelos y plumas *"porque es una pluma y un abrigo"*. Cuando se pasa a los conjuntos de cuatro, tales como cacerola-tapa y botella-corcho, agrega a las utilizaciones la clase de *"cosas para la cocina"*. Pero cede a un contraejemplo cuando se reemplazan los pelos del perro por su casilla.

MUR (7;9) en principio sólo es interrogado acerca de las matrices ya construidas para ver cómo las interpreta, comenzando por la más difícil: enfermera-jeringa y peluquero-tijeras. "¿Por qué puse esos dibujos juntos?. —*Es difícil... Esa* (primera pareja) *queda bien en conjunto, y ésa* (la segunda) *también. ¡Ah! Eso* (gesto vertical para mostrar jeringa-tijeras) *queda bien porque son utensilios y eso* (las personas) *porque son oficios.* — (Botella-corcho y cacerola-tapa). ¿Por qué van juntos? — *Porque ésas son dos tapas y acá se puede poner líquido adentro* (= dos recipientes)". (Manubrio-bicicleta y timón-barco). — *"Porque el manubrio es para conducir y ése también; y la bicicleta es un medio de transporte y el barco también"*. — (Pájaro-plumas etc.) — *Acá* (gesto vertical) *son animales y allá* (pelos y plumas) *es como manta para nosotros"*.

ROG (8;0) resuelve bien los correlatos habituales pero está de acuerdo en reemplazar el manubrio de la bicicleta por un timbre *"porque cuando alguien nos molesta, lo tocamos"*. Sin embargo, es capaz de construir un correlato de su cosecha que sigue siendo cercano: taza-vaso y vajilla-plato, pero agregando: *"Es lo mismo porque la taza es una vajilla"*.

Estas reacciones del nivel IIA son muy iluminadoras. Ante todo, la diferencia notable entre los casos intermedios de Bol (al comienzo), Cho y Rol, y los del nivel IB, de Can a Mer, estriba en que, a pesar de la aparente analogía de las relaciones elementales utilizadas por ellos en la construcción de las parejas, esas parejas y sus relaciones, en el nivel IB, siguen siendo inestables, y simplemente, se las prefiere en forma momentánea a otras parejas posibles, de tal modo que cuando se las intenta reunir en cuaternas, o se las olvida o se las deforma por el agregado de relaciones nuevas que no tienen ningún parentesco con ellas. Lo propio de las parejas elementales de Bol, Cho y Rol y de sus relaciones constitutivas es, en cambio, el hecho de permanecer estables (frente a la regresión de Bol) y no ser olvidadas, deformadas o complementadas de algún modo cuando se trata de reunirlas en cuaternas. El problema que entonces se plantea es el de la razón o el de la naturaleza de esta consolidación, pues sería demasiado fácil decir que cuando el sujeto intenta ser objetivo y renuncia a las vinculaciones arbitrarias del nivel IA para apuntar a las propiedades más intrínsecas, esto es, más estables, de los objetos, adquiere, a partir de este hecho, relaciones elementales sólidas que a continuación llega a coordinar en correlatos. Pero esta interpretación a la vez empirista y que pretende proceder de lo simple a lo complejo a la manera asociacionista suscita dos problemas: el del modo en que un sujeto tiende a la objetividad, y el de si la ilación entre la consolidación de las parejas y la formación de los

correlatos tiene un sentido único, o si acaso es igualmente posible construir cuaternas que den consistencia a las relaciones elementales de dos términos.

Ahora bien: la respuesta a estas dos preguntas es la misma. Por un lado, el sujeto adquiere una objetividad relativa sólo en la medida en que está activo y ejercita sus esquemas de acción en su doble dirección asimiladora y de acomodación (y esto no es una explicación tautológica, pues la asimilación es algo completamente distinto de un simple registro de los datos exteriores). Por otra parte, la consolidación de los esquemas de asimilación se vincula precisamente a su ejercicio: es, pues, el mismo poder asimilador de poner en relación el que consolida las parejas elementales y permite reconocer la misma relación en otra pareja por simple sustitución de los términos ("Las plumas son los pelos de un pájaro", dice Cho). La capacidad de construir cuaternas, en tanto reconocimiento de una equivalencia entre dos relaciones, no es otra cosa que la expresión del progreso que, por lo demás, conduce a consolidar las relaciones elementales.

Pero ¿cuál es la característica de este progreso? Si se tratara de una simple consolidación, como la que creemos discernir en las reacciones intermedias de Bol, Cho, y Rol, se nos podría acusar de explicar el opio de los correlatos logrados por los sujetos invocando la virtud dormitiva de la consolidación de sus esquemas: ahora bien, esta consolidación, en los casos claros de nivel IIA, a partir de Mag y de modo espectacular en Mur, de 7;9, se traduce en una nueva característica, completamente ausente de las respuestas del estadio I: es la construcción de "clases" vinculando los términos de las relaciones elementales lo que naturalmente tiende a la vez a consolidar a éstas y a favorecer la formación de cuaternas porque, esas clases se aplican a los objetos correspondientes de las dos parejas con las que se constituyó la cuaterna: Mag habla, así, de "animales", e implícitamente de recipientes, Cyn invoca los "vehículos" y "lo que abriga a los animales", Los "las cosas de cocina", Rog la vajilla y Mur traduce todas las matrices que se le presentan utilizando puro lenguaje de clases, incluso poco usuales (los "oficios", los "utensilios", los "medios de transporte", etc.)

El problema consiste entonces en determinar la razón de esta aparición de las clases, lo cual es central para la abstracción reflexionante. Ahora bien: se trata de una transformación de los esquemas de asimilación, respecto de la cual el capítulo V ya nos proporcionó útiles enseñanzas. Las relaciones en juego en el estadio I, del tipo "es para", etcétera, se reducen, en efecto, a significaciones cualitativas en el sentido del capítulo I, es decir que proceden en comprensión sin referencia a las extensiones y por asimilación progresiva de los objetos a esquemas de utilización o de acción. La novedad que conduce a la introducción de clases consiste en que el ejercicio de asimilación culmina en una asimilación de los objetos entre sí, y ya no solamente de cada uno a un esquema de acción: (*) esta conexión establecida entre los objetos como tales

(*) El paso de la asimilación de los objetos a los esquemas de acción, a la asimilación de los objetos entre sí comienza naturalmente con la constitución de la representación y de la función semiótica, sucediendo a las conductas puramente senso-motrices. Pero como las estructuras preoperatorias se basan todavía en esquemas de acción con vistas a la interiorización, las dificultades de la coordinación entre la asimilación en comprensión y la constitución de las extensiones vuelven a hallarse durante todo el estadio I y reaparecen a propósito de cada nuevo problema.

implica entonces la consideración de su extensión, y por eso, sus cualidades comunes, corresponde en extensión a una clase. Esto parece un reducido progreso, pero en realidad es considerable porque conduce a las cuantificaciones, a las inclusiones, etcétera; en síntesis, a la constitución de las operaciones concretas. En el caso del presente problema explica la solidaridad de las clasificaciones operatorias simples o dobles (matrices) y, en consecuencia, la unidad funcional de la consolidación de las relaciones elementales, enmarcadas, de aquí en adelante, en sistemas, explícitos o posibles, de clases, y el comienzo de la formación de los correlatos.

Pero ello es sólo un comienzo, y, como se ha visto (casos de Cyn, Los, etc.), estos sujetos del nivel IIA ceden todavía a los contraejemplos: tanto la consolidación de las relaciones elementales como la asimilación de las relaciones equivalentes y de los términos que pertenecen a parejas diferentes, en el momento de la elaboración de los correlatos, se mantienen sólo en una fase incoativa.

§ 3 | EL NIVEL IIB Y EL ESTADIO III.— El progreso marcado por los sujetos del nivel IIB (siendo, por lo demás, muy continua la transición entre IIA y IIB) consiste simplemente en resistir a las contrasugestiones, en tanto que, la construcción de los correlatos supone todavía, como en IIA, una sucesión más o menos larga de tanteos:

DAV (8;2) construye sus parejas y se le pide después que las reúna de a cuatro: relaciona auto-inflador con bicicleta, pero no sabe que hacer con manubrio. Después forma la cuaterna pájaro-plumas y perro-pelos *"porque son animales y cosas de animales que dan calor"*. — Y si se reemplazan las plumas por el nido, ¿no se puede decir que el nido es para el pájaro como el pelamen para el perro? — *Eso podría ser, pero no, el nido no tiene pelos: el perro tiene pelos y el pájaro no se sabe lo que tiene* (si se reemplaza plumas por nido)".

PAT (10;1) después de las parejas y las cuaternas habituales: "¿Y si para la bicicleta yo pusiera inflador? — *No, queda mejor con manubrio, porque sin manubrio no se puede manejar la bicicleta ... el inflador va con la bicicleta pero no con el barco, y el timón es casi lo mismo: es para conducir.* — Y si para el barco se pone una sirena, entonces con la bicicleta... *Un timbre*".

En cuanto a los sujetos del estadio III alcanzan naturalmente los correlatos sin muchos tanteos, pero además pueden imaginar, lo que no sucede en los casos más tempranos sino en los más aproximativos, como el de Rog (§ 2). Además, cuando se plantea el problema, advierten su analogía con las proporciones:

ERI (10:9) tras rápidos aciertos inventa como correlato: una linterna-una pila y un horno-el gas. Se le propone que compare la proporción 2/4 = 3-6 con enchufe/aspiradora = bomba de nafta/auto. "¿Qué quiere decir el signo = ? — *Dan lo mismo: los*

2/4 son la mitad, los 3/6 también. — ¿Y eso se parece a esto (correlato?) — *Sí, el enchufe y la bomba sirven para lo mismo.* — ¿El signo = vale solamente para el enchufe y la bomba? — *No veo por qué. ¡Ah! sí, el enchufe es para la aspiradora y la bomba para el auto.*"

El rechazo de los contraejemplos, que se generaliza en el nivel IIB, marca la diferenciación y el ajuste término a término de las relaciones correlativas. En el estadio I el niño acepta cualquier contrasugestión porque las relaciones que él mismo estableció son de cualquier índole y no apuntan al conjunto de los términos de una cuaterna: en efecto, el sujeto está satisfecho y encuentra que todos los términos están implicados cuando existe una sucesión de relaciones de a dos en dos que alcanzan a los cuatro alternativamente (más o menos como en una investigación de inteligencia práctica en la que el problema consistía, dados tres o cuatro lápices, en hacer que cada uno tocara a los demás; el sujeto simplemente los alineaba declarando resuelto el problema porque *A* toca a *B* y *B* toca a *C*, sin ocuparse de *A* y *C*. En el nivel IIA, en cambio, ya hay correlato en todos los casos, pero con formas más o menos diferenciadas: en presencia de un contraejemplo, el sujeto lo acepta, pero con la idea de una relación simplemente más débil, que se podría expresar así: "*X* es necesario a *A* (o simplemente útil) como *y* lo es a *B*", sin precisar más el parentesco del lazo *xA* con *yB*. Bol, por ejemplo está de acuerdo en sustituir el manubrio por el inflador en el caso de la bicicleta, porque para inflar sus gomas es tan útil como el timón lo es al barco, pero, agrega, el manubrio queda mejor porque es "más importante". La misma reacción tiene Mag: el inflador y el manubrio, "quedan los dos bien", pero si se centra en la función del timón, el manubrio es preferible. Lo propio de las reacciones establecidas en el nivel IIB es, en cambio, el renunciar a esas relaciones indiferenciadas para ajustarlas con más precisión a cada uno de los términos de la cuaterna: por tanto, para un correlato *AB* = *CD* esos sujetos exigen: 1) la misma relación entre *A* y *B* que entre *C* y *D*, y 2) la misma relación entre *A* y *C* que entre *B* y *D*. Y como en lo sucesivo esas relaciones se apoyan en los ajustes de clases y subclases o en relaciones infralógicas entre partes y objeto total (pero traducibles igualmente a relaciones de clases: cf. la expresión de Dav, tan digna de observación, quien asocia perro y pájaro "porque son animales", y pelos y plumas por ser "cosas de animales"), las equivalencias 1) y 2) suponen asimismo para ellos, las siguientes correspondencias: 3) que *A* y *C* presentan el mismo ajuste de clase y subclase (o del todo y las partes) que *B* y *D*, y 4) que sucede lo mismo para *A* y *D* comparados con *C* y *D*.

Es lo que Dav y Pat nos muestran explícitamente: para Dav, sustituir las plumas del pájaro por el nido, "eso quedaría bien" (pensando que también da calor), "no, el nido no tiene pelos", y si se suprimen las plumas "ya no se sabe qué es lo que tiene el pájaro" y que corresponda a los pelos. Igualmente para Pat, un inflador iría bien con la bicicleta, en la medida en que ésta lo necesita, pero no basta para un correlato de estructura diferenciada, porque "no queda bien con el barco", mientras que manubrio y timón son dos partes comparables. Con las reacciones del estadio III estas diversas cuestiones se resuelven inmediatamente.

§ 4 | CONCLUSIONES. — La construcción de los correlatos constituye un ejemplo de abstracción reflexionante tanto más claro cuanto que su contenido se debe a una serie de abstracciones empíricas, puesto que se refiere a las propiedades intrínsecas de los objetos. Esta construcción consiste esencialmente en la elaboración de una forma, y los hechos precedentes muestran sus etapas con cierta claridad.

El primer resultado sorprendente a este respecto es el que proporcionan las reacciones del nivel IA, que revelan que la abstracción empírica no es apta para alcanzar por sí sola los caracteres importantes del objeto sin una actividad del sujeto: en efecto, la acomodación al objeto que supone la lectura de sus propiedades es función de una asimilación al sujeto, que es creadora de formas puesto que engendra esquemas. Ahora bien, recordémoslo, estos esquemas conducen, ya en el nivel senso-motor, a estructuras de acciones que anuncian las construcciones operatorias con la salvedad de que les falta la conceptualización y, en particular, la "reflexión" sobre sí mismas. Cuando un bebé de algunos meses ha descubierto el comportamiento de un soporte y lo aplica a nuevos objetos puestos sobre nuevos basamentos móviles, hay asimilación constitutiva a un esquema simple, funcionalmente (aunque no estructuralmente) comparable a un concepto. Pero cuando se pone a hacer ensayos con una cuerda atada a un móvil y asimila esta situación a lo que ya conoce a través de los soportes (la posibilidad de atraer hacia sí el objetivo, gracias a un intermediario) el sujeto se vincula con esquemas dobles y descubre la doble relación: el móvil deseado es a la cuerda lo que el objetivo puesto sobre el soporte es a éste. Hay ya un embrión de correlato práctico, ligado sólo al comportamiento, y por tanto sin representaciones ni extensiones, y, según toda probabilidad, completamente inconsciente. Por cierto que no vamos a intentar extraer directamente los correlatos superiores de estas cuaternas constituidas por dobles esquemas senso-motores, pero sería útil señalar que la asimilación senso-motriz es ya rica en posibilidades funcionales y que al atribuir posibilidades más amplias pero funcionalmente análogas a la asimilación conceptual, no nos aventuraremos en modo alguno en el terreno de lo arbitrario.

El primer resultado de esta asimilación conceptual es visible desde el nivel IB: es el de retener, en el momento de la constitución de las parejas, sólo las características más generales de los objetos considerados, y ello bajo la forma de significaciones cualitativas y finalistas ("es para") descartando primero algunas relaciones, de naturaleza arbitraria: pero esa elección debida a la asimilación generalizadora es tan poco consistente que, en el momento de la construcción de las cuaternas, estas relaciones ocasionales reaparecen profusamente, salvo una o dos excepciones (ya esbozadas en IA) de los esquemas de acciones particularmente pugnantes (como "conducir" para bicicleta y barco).

En el nivel IIA esta asimilación generalizadora se consolida desde los casos intermedios (de Bol a Rol) y se esbozan los primeros correlatos estables; la cuestión es entonces establecer de dónde proceden. Ahora bien, en forma análoga a lo que hemos dicho más arriba respecto de la asimilación senso-motriz, el ejercicio de la asimilación que conduce a la formación de esquemas

estables se aplica tanto a las situaciones de esquemas dobles como a las situaciones de esquemas simples, esto es, tanto a la asimilación de las relaciones como a la de los predicados aislados (por lo demás, todo predicado es, implícitamente, una relación de equivalencia: "cubierto de pelos" implica, a propósito de un perro determinado la comparación "como todos los perros", etc., es decir, "peludo" = "co-peludo"). El verdadero problema no es, por tanto, el paso de lo simple a lo doble, porque toda asimilación puede prolongarse en asimilación de asimilaciones, sino el del paso de las significaciones cualitativas a las clases susceptibles de extensión, con necesidad de precisar en el interior de las cuaternas las relaciones diferenciadas entre clases y subclases *A*, *B*, *C*, *D*, sin contentarse con analogías globales.

En lo que se refiere al paso de las significaciones cualitativas a las clases, es un problema general, no especial de los correlatos, y se han recordado en el § 2 los análisis del capítulo V: cuando la asimilación de los objetos a los esquemas de acción se completa por medio de una asimilación de los objetos entre sí (posibilitada por su representación), las cualidades comunes en comprensión engendran, por ello, clases en extensión por abstracción reflexionante, porque la "reflexión" que sigue al "reflejamiento" en este nuevo plano de asimilación extrae, de las relaciones en comprensión, las que determinan la extensión.

Es, sin duda, esta exigencia de una correspondencia continua entre las relaciones cualitativas en comprensión y las clases en extensión lo que conduce a precisar las relaciones (paso de los niveles IIA a IIB), pues mantenerse en el terreno de la vaguedad cuando hay que delimitar las clases en juego es más difícil que atenerse a significaciones cualitativas más o menos elásticas. El sentido general de los correlatos del nivel IIA es, en efecto, simplemente (agregando las situaciones en las que los sujetos aceptan los contraejemplos): "*A* va con *B* (= es útil o necesario "para su buen funcionamiento") como *C* va con *D*" sin que sea necesario diferenciar la relación "va con" hasta que sea equivalente, en detalle, en los dos casos, puesto que al sujeto la equivalencia global "ir bien con" le parece suficiente. Como hemos visto en § 3, los sujetos del nivel IIB llegan, en cambio, a exigir una diferenciación de esas equivalencias, o, más precisamente, un grado más fino de equivalencia (pues las equivalencias pueden graduarse, desde la más estricta que es la identidad $A = A$ o la relación $AB = BA$, hasta las más generales: *A* y *B* son dos cosas, o *AB* y *CD*, dos relaciones que tienen en común convenir en sus términos). Ahora bien: pareciera que esta diferenciación y esta precisión acrecentadas resultan de la doble perspectiva de las relaciones cualitativas y de los ajustes de clases (tanto en el sentido infralógico como en el sentido de los conjuntos discretos): cuando Dav vincula cualitativamente pelos y plumas pensando que dan calor, pero los define además como "cosas de animales" en el sentido de partes de su cuerpo, se niega a reemplazar las plumas por un nido, el cual, sin embargo, también da calor, porque el nido "no tiene pelos" y se sobreentiende que no es una "cosa de animal" según la misma significación. La novedad de los correlatos acabados en los que las relaciones *AB* y *CD* son equivalentes como *AC* y *BC*, pero en los que esas mismas relaciones corresponden a ajustes de clases, puede también interpretarse como el producto de una "reflexión"

reorganizadora que no sólo se vuelve posible sino también necesaria, tarde o temprano, en virtud del "reflejamiento" de las significaciones cualitativas en el plano de las extensiones. (*)

Respecto del paso de los correlatos a las proporciones, ya hemos comprobado con B. Inhelder (**) que la constitución de toda proporción métrica (en los diversos problemas abordados) estaba precedida por su elaboración cualitativa, esto es, por la comprensión del correlato correspondiente, antes de la introducción de las medidas. La única diferencia con los correlatos reside en que en este caso éstos se refieren a las covariaciones, lo que permite entonces un juego de compensaciones y la igualdad de los productos cruzados, como lo ha demostrado uno de nosotros en relación con lo que ha llamado las "proporciones lógicas". (***)

(*) Recuérdese que distinguimos el "reflejamiento" como proyección sobre un nuevo plano, y la "reflexión" como organización reflexiva en sentido mental.

(**) Inhelder y Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, París, P.U.F.

(***) Piaget, *Essai sur les transformations des opérations logiques*, París, P.U.F.

CAPÍTULO VII

De las formas concretas del grupo de Klein al grupo INRC

EN COLABORACIÓN CON A. MUNARI

§ 1 | POSICIÓN DEL PROBLEMA. — El grupo de Klein es un grupo conmutativo de cuatro transformaciones, *T1* a *T4*, tales que la composición de dos de las operaciones, *T2* a *T4*, da la tercera, y que su conjunto *T2* a *T4* vuelve a dar una forma idéntica a *T1*. Con esta forma muy general, el grupo de Klein aparece en todos los dominios. Basta con considerar dos caracteres, *A* y *B*, y en una matriz multiplicativa de clases, las cuatro asociaciones posibles *A.B*, *A.*(*no-B*), (*no-A*). *B* y *ni A ni B*, para que el paso de uno a otro constituya un grupo de Klein. Del mismo modo, la rotación de 180° de una figura asimétrica sobre el plano horizontal y su rotación de 180° sobre el plano vertical (es decir, en dos permutaciones: adelante-atrás y arriba-abajo, cada una por separado o las dos juntas) dan un grupo de Klein; esas dos especies de rotación, separadas o juntas, equivalen a la negación de *A* o de *B*, y las negaciones dobles conducen nuevamente a *AB*.

El grupo INRC constituye, en cambio, un caso particular del grupo de Klein, de caracteres bien delimitados, y que sólo se presenta en estructuras de "conjuntos de partes" (simplejos [*]), y especialmente en el terreno de las operaciones de la lógica de las proposiciones. Dada una operación proposicional bivalente como $p \vee q$, es posible, en primer lugar, introducir su negación *N*, que es su complementario en relación con la "tautología" $(p.q) \vee (p$ no-$q)$ $\vee$ (no-p y q) $\vee$ (ni p ni q), que corresponde a las cuatro parejas *AB*, *A no-B*, etcétera, de una matriz multiplicativa de clases. Pero, en oposición al simple

(*) *Simplexes* en el original francés (N. del T.)

paso de una de estas parejas a la otra, la negación N, en juego en las operaciones proposicionales, conlleva una complementariedad entre una pareja ($p.q$, etc.) y las tres restantes, entre dos parejas y las otras dos, entre tres parejas y la cuarta, o entre las cuatro parejas y ninguna, o sea, dieciséis negaciones posibles, según las dieciséis combinaciones (*) a las que dan lugar tanto p y q como sus negaciones *no-p* y *no-q*.

En el caso particular de $p \vee q$, su negación N es "ni p ni q", lo que equivale a "ni A ni B"; pero, en el caso de $p = q$, su negación no es "no-p = no-q" (que participa de la "forma normal" de $p = q$), sino "(p y no-q) $\vee$ (no-p y q)", es decir la exclusión recíproca W. La negación N es, por tanto, la de la operación como tal y no la de los términos que ella relaciona. En cuanto a la recíproca R, constituye, por el contrario, la negación de los términos mismos p y q, mientras que la operación que los relaciona se mantiene invariable, aunque se la designa con otro símbolo. En el caso particular, $R\ (p \vee q) = \bar{p} \vee \bar{q}$ (lo que equivale a $p \mid q$); del mismo modo, $R\ (p \supset q) = \bar{p} \supset \bar{q}$ (lo que equivale a $q \supset p$); $R\ (p.q) = \bar{q}.\bar{p}$; etcétera. En tercer lugar, la correlativa C se define, independientemente (y esto es esencial) de N y de R, por la permutación de los ($\vee$) y de los ($\wedge$) o (•) en la forma normal de la operación inicial. En el caso de $p \vee q$, cuya forma normal es $[p.q] \vee [(no\text{-}p).q] \vee [p.\ (no\text{-}q)]$, la correlativa es, por consiguiente: $[(p \vee q)] . [(no\text{-}p) \vee q] . [p \vee (no\text{-}q)]$, lo que da $C = p.q$. En el caso de $p \supset q$, la misma permutación en $(p.q) \vee (no\text{-}p.q) \vee (ni\ p\ ni\ q)$ da $C = (no\text{-}p) . q$, etcétera. El interés reside entonces en el hecho de que estas tres definiciones independientes de N, R y C conducen, sin embargo, a verificar $R.N = C$; $R.C = N$; $C.N = R$ y $N.R.C. = I$ (idéntico). Desde el punto de vista formal, el grupo INRC es, pues, más complejo que las formas elementales del grupo de Klein: el paso de $A.B$ a *ni A ni B*, en particular, no es sino una reciprocidad R si nos atenemos a nuestras definiciones, y el de $A.B$ a *no-A.B* es sólo una reciprocidad parcial (completada por *A. no-B*).

Desde el punto de vista psicológico, el contraste es todavía más claro, pues, aún cuando se lo aplica a proposiciones que describen acciones materiales, el grupo INRC supone una abstracción reflexionante y una generalización no accesibles aún en el nivel de las operaciones concretas y que consiste en diferenciar, para coordinarlas, una inversión N que se refiere a la operación como tal y una reciprocidad R que se refiere a la negación de los términos. Por ejemplo, en un problema de acción y de reacción, una de las transformaciones (ya se la llame N o R) consiste en modificar la cantidad de acción (o de reacción), mientras que la otra consiste en oponer a la acción una reacción de sentido contrario que la compense y, por tanto, anule su efecto, pero sin modificarla en sí misma. En los problemas de dos sistemas de coordinadas (un caracol sobre una tablita que se puede desplazar en sentido contrario al del animal), una de las transformaciones (N) invierte la dirección de la marcha del caracol (o de la tabla), mientras que la otra (R) compensa esa marcha por un desplazamiento contrario de la tablita. Por el contrario, en el caso de las estructuras elementales del grupo de Klein, no hay nada semejante, y sería arbitrario distinguir N y R, porque las cuatro transformaciones son homogéneas

(*) Se recordará más adelante que asimismo es posible reunir las parejas de clases (*AB*, etc.) según la misma combinatoria, pero con significaciones diferentes.

y consisten sólo en negaciones de términos: de tal modo, el paso de *A.B.* a (*no A*). *B*, etcétera, es comprendido a partir del momento en que el sujeto se torna capaz de construir por sí mismo una matriz de cuatro casilleros, es decir, desde el nivel IIA, a los 7-8 años.

Pero es más interesante, desde el punto de vista de la abstracción reflexionante y de la generalización, preguntarse en qué medida la adquisición de estos grupos cuaternarios elementales, cuya génesis en tanto grupos aún queda por explicar, prepara la formación del grupo *INRC*. En efecto: el problema central, en lo que concierne a este último, es que, aún cuando se refieran a operaciones proposicionales, las transformaciones *N.R.C.* e *I* no forman parte de esos funtivos ($\vee$; . ; $\supset$, etc.), pero transforman unas operaciones en otras, lo cual es completamente diferente: son, pues, operaciones de potencia superior, u "operaciones *sobre* operaciones", y su génesis plantea un problema. Por el contrario, en el caso del grupo de Klein, que permite pasar de *A.B.* a *A. no-B* o a *ni A ni B*, las operaciones que permiten tales pasajes no difieren sensiblemente de las que intervienen en la construcción de la matriz de clases de cuatro casilleros *AB*, *A no-B*, etcétera. Sin embargo, es interesante analizar la manera como el sujeto va a coordinar dos o tres pasos, y esas coordinaciones pueden preparar las transformaciones más fuertes, propias del grupo *INRC*. Pero se debe observar cuidadosamente que esas composiciones entre dos o más parejas (por ejemplo *AB* y *A no-B*, etc.), sólo corresponden entonces a las operaciones proposicionales ($p \vee q$, etc.), y no a las operaciones *N*, *R* o *C* que se refieren a esas operaciones y que son de tipo superior. Además, subsiste una diferencia entre la combinatoria proposicional y la combinatoria (siempre posible) de las clases: que cada una de las dieciséis operaciones proposicionales presenta un sentido específico y bien diferenciado (implicación, disyunción, equivalencia, incompatibilidad, etc.), mientras que en el caso de las parejas de clases o de las rotaciones, etcétera, su coordinación en conjuntos de dos ó tres parejas o rotaciones sucesivas conllevará sólo un grado débil de complejidad superior, en tanto que las diferencias que las separan siguen siendo análogas a las que oponen una de las parejas a otra o una rotación a otra. En cuanto a someter estos conjuntos mismos (de dos, tres o cuatro parejas) a transformaciones isomorfas a *N*, *R*, *C* ó *I*, naturalmente se lo podrá hacer también, pero desde el punto de vista psicológico solamente en el plano del pensamiento reflexivo, es decir, mediante una traducción en transformaciones proposicionales, que se acercan entonces (y sólo entonces) al grupo *INRC*.

I / LAS ROTACIONES DE 180°

Comenzamos por el problema de las rotaciones, porque su solución da lugar a los niveles más diferenciados y, por otra parte, para reservar a la sección II los problemas de comparaciones entre diversas situaciones, de la cuales unas conllevan una estructura de grupo y las otras no.

La técnica consistió en presentar a los sujetos un gran garaje que tiene en su parte central tres cocheras paralelas, abiertas del mismo lado y rodeadas de suficiente espacio para que los camiones puedan circular libremente. Ante la entrada del garaje se pone un pequeño camión cargado con un bulto rectangular de "ladrillos" rojos o blancos,

que forman un todo, de tál modo que se pueda distinguir fácilmente (gracias a la disposición de los colores) la parte de adelante y la de atrás del bulto, así como las partes de arriba y de abajo. El camión debe entrar en las cocheras (siempre marcha atrás) y descargar el bulto sobre otro camión que lo espera y está vacío. En la cochera o garaje núm. 1 el primer camión descarga su bulto sobre el segundo por deslizamiento, pero como el segundo camión se encuentra estacionado en dirección opuesta, la parte de adelante del bulto pasa a ser la parte de atrás en este camión, lo que equivale a una rotación de 180° en el plano horizontal. En la cochera núm. 2 los camiones están ubicados de modo tal que para pasar el bulto de uno a otro hay que darlos vuelta (rotación de 180° en vertical). Por último, en el garaje núm. 3, el traslado del bulto exige una doble rotación adelante-atrás y arriba-abajo. Para concretar los problemas presentados, se pone en la entrada del garaje, un camión de muestra que lleva un bulto de ladrillos en la disposición en que se desea que esté al salir el camión principal, el cual entra con un bulto en la disposición inicial.

Los problemas se refieren primeramente a operaciones que implican la utilización de un solo garaje (una cochera). Pero a continuación se señala que está cerrado y que se trata entonces de llegar al mismo resultado pasando por dos garajes sucesivos.

Después se pide, además, la obtención de una disposición final idéntica a la inicial, lo que equivale a combinar las operaciones 1 + 2 + 3, y se hace precisar si ese orden es necesario (mientras que el grupo en juego es conmutativo). Por último, se introduce otro bulto de ladrillos (núm. II) de las mismas dimensiones, pero de colores distribuidos en forma distinta, para determinar la generalización de los procedimientos utilizados con el bulto I.

Designaremos a los garajes con los núms. 1, 2 ó 3, y a las operaciones correspondientes con *A*, *B* y *C*, mientras que la operación idéntica se llamará *D*.

§ 2 | EL ESTADIO I. — Un primer estadio (5-6 años) se caracteriza por el fracaso frente a las tareas propuestas, por falta de diferenciación entre los tres tipos de rotaciones y por incomprensión de toda composición entre las operaciones:

XAV (5;1). Se pide la operación *C* (por la presentación de la situación inicial de los ladrillos en el camión de entrada y de la situación final en el camión de salida, que está precisamente debajo): "*Voy a 1* (prueba). *No.* — ¿Adónde vás? — *No sé.* — ¿A otro garaje? — *Sí, quizás* (prueba ir a 2). *No.* — Entonces, ¿adónde? — *A 3* (sólo queda ese). *Sí, así va bien.* — ¿Y si ahora 3 está cerrado? — *Entonces no se puede.* — Intenta ir a los otros. — *No se podrá.* — Inténtalo. — (Retoma 1 solo y 2 solo.) — Pero: ¿cómo hacer con el otro? — ... — ¿Y así (1 y 2)? — ... — (Se lo hace.) — *Sí.* — ¿Qué hice? — *Usted fue a 1 y a 2.* — ¿Es como si yo hubiera hecho qué? — ... — 1 y 2 ¿son como 3? — ..." Otros ensayos no agregan nada. Naturalmente fracasa en la operación *D*' idéntica, y cuando se muestra que 1, 2 y 3 = 4 no sabe por qué. Con el segundo bulto de ladrillos (II) "*no cree*" que se puedan volver a hacer las mismas operaciones, y cuando se le pide una de ellas y fracasa considera inútil probar con las otras cocheras: "*No, no vale la pena.*"

YVE (5;11), también considera que "*no es posible*" obtener una transformación por medio de los otros dos y que tampoco es posible repetir lo que hizo utilizando el material II "*porque no es igual*".

Aunque los sujetos de esta edad saben naturalmente dar vuelta un objeto, e incluso en los dos sentidos cuando es necesario (adelante-atras y arriba-abajo; por ejemplo un pullover), no extraen de la coordinación de sus acciones ninguna abstracción suficiente para diferenciar los movimientos

requeridos, y menos aún para comprender la composición de dos de ellos. Pero lo más sorprendente es que después de haber visto de qué se trataba no creían posible volver a hacer las mismas rotaciones con otro bulto de ladrillos, similar en todo al primero salvo en la disposición de las superficies blancas o rojas.

§ 3 | EL NIVEL IIA. — Durante este subestadio, en las operaciones *A* a *C* se acierta por tanteos más o menos prolongados y el sujeto admite naturalmente que se las podría reproducir con el material II, pero no llega por sí mismo a efectuar las composiciones y no siempre las comprende una vez sugeridas:

DEN (7;6) acierta en las rotaciones simples sólo después de tanteos. Cuando llega a 2 para *B*, se le pregunta: "¿Y si está cerrado? — *Hay que ir allá* (3). — (Lo intenta) — *No.* — ¿Entonces? — *Allá* (1)." Para *A* con 1 cerrado propone 2. Cuando se sugiere 2 + 3 no halla otra explicación que "*Se va a 2 y a 3*". Contrariamente a la comprensión habitual en este nivel de la negación de una negación, no prevé el resultado de dos operaciones idénticas en el mismo garaje y todavía menos la operación idéntica para 1, 2 y 3: "*¡Ah!* (ante el hecho) *¡es lo mismo!* — ¿Por qué? — *No sé*".

PAU (7;8) tras los mismos tanteos llega a 2 para *B*. "¿Y si 2 está cerrado? — *Se puede ir a 3.* (Comprueba el fracaso.) — ¿Qué hacer? — *Ir a 1.* — ¿Con los ladrillos como al comienzo (antes de 3) o así (como van para 3)? — *Los ladrillos como al comienzo.* — ¿Entonces queda así (se lo muestra)? — *No, como al salir de 3* (va a 1). — ¿Así queda bien? — *Sí.* — ¿Y ahora para llegar allá (D = idéntico)? — *Hay que ir a 1* (prueba). — ¿Y después? — *A 2* (prueba) — ¿Y para ir a otro lado? — *Sí, a 1* (prueba). *¡Lo mismo* (que antes)! — ¿Entonces adónde ir? — *A 3* (acertado). — Entonces se hizo 1 + 2 + 3. ¿Se puede hacer 3 + 2 + 1? — *No, porque en 3 se da vuelta y en dos también, y en 1 queda igual*".

VAL (8;4) no prevé mejor las rotaciones: para *A* en 1: "*Se va a 2 o a 3.* — ¿Por dónde comienzas? — *Por aquél* (2). *No, es del mismo lado.* — ¿Entonces adónde hay que ir? — *A 1.* — ¿Quedará bien? — *No sé* (prueba). *Sí, queda bien.*" etcétera. Para *C*, prueba en 2; después descubre 3. "¿Y si tres está cerrado? — *Se puede ir a 2* (lo hace). — ¿Queda bien? — *No.* — ¿Entonces? — (Después va a 3, pero a título de ensayo) *Sí*". Tras un nuevo A en 1: "¿Y si 1 está cerrado? — *Hay que ir a 3* (fracasa). *Entonces hay que ir a 2* (va allí después de 3). *Sí, queda bien.* — ¿Por qué? — *Porque ha estado en 2 y los ladrillos se han dado vuelta* (correcto). — ¿Se puede decir que ir a 1 es como ir a 2 y a 3? — *Sí, porque el garaje 3 es más amplio que el 1.* — ¿Y ahora para esto (D = idéntico)? — *Se puede ir a 1. En 2 no se puede porque lo haría dar vuelta. En 3 queda bien.* — ¿En 1 y en 3? — *Sí, pero no estoy segura. Lo mejor sería solamente en 1* (prueba). *No queda bien.* (Va a 3.) *Está dado vuelta.*" Prueba 1 + 2 + 3. "Queda bien? — *Sí, había dos falsos: 1 y 2.*"

KEL (8;7) halla 3 para C. "¿Y si 3 está cerrado? — *Hay que ir a 1* (prueba). *No, no queda bien. Aquí* (2: prueba). *Tampoco queda bien.*" Se le hace una sugerencia casi dictándole la respuesta (puesto que si 3 está cerrado, sólo restan 1 y 2): "Puedes ir a dos garajes después. — ... — Mira (se lo pone en 1). ¿Adónde ir después? — (Lo saca de 1 para ponerlo en 2) *No queda bien* (duda, después va a 1, a partir de 2). *¡Ah! Así.*" Se pasa al otro material: "*A en C* — ¿Pero 3 está cerrado? — (Prueba empíricamente 2 y después a 1) *Así queda bien.* — ¿Y si se pasa de 1 a 2? — *Sí ... no*

(prueba). *Sí, es lo mismo.* — Queda así (I posición 1). Halla lo mismo pasando por 1, 2 o 3 garages.— (Va a 3). — *No queda bien.* (A 2) *No queda bien.* (A 1) *No queda bien.* — Bueno, empecemos de nuevo (gesto de reunir). — (Hace 1, 2 y 3) *Así queda bien.* — ¿Y 3, 2, 1? — *No.*"

Vemos que estos sujetos llegan más o menos rápidamente a hallar una de las tres rotaciones en correspondencia con uno de los garajes, lo cual, desde el punto de vista proposicional, equivaldría a una proposición aislada, *p, q* o *r*. En cambio, no llegan a coordinar dos rotaciones, y mucho menos tres, lo cual equivaldría a las conjunciones proposicionales *p. q*, etcétera, o, mejor (*no-p*). (*no-q*), porque las rotaciones de 180° son inversiones. Se comprueba, en efecto, que, cuando un garaje está cerrado, el niño comienza siempre por recurrir a uno solo de los demás, del cual sabe, sin embargo, por lo que precede, que da lugar a una operación diferente. Ni siquiera acierta en la inversión de la inversión (*no-p*) . (*no-p*) = *p* en el caso de las rotaciones y aún menos el retorno a lo idéntico mediante la unión de las operaciones *ABC*. En cuanto a las explicaciones que da el sujeto después de una sugerencia y un acierto empírico, siguen siendo muy incompletas, y Val que es el que más se aproxima ("estuvo en 2 y, se ha dado vuelta"), para explicar que *B.C* = *A* (*2 y 3 vuelven a dar 1*), solo hace alusión a la amplitud del garaje 3 (que permite la doble inversión *C.*).

§ 4 | LOS NIVELES IIB Y III. — Por el contrario, hacia los 9-10 años, y en algunos casos de 8 años, se encuentran soluciones inmediatas a operaciones aisladas y composiciones espontáneas de dos y hasta de tres operaciones, pero con tanteos, y aun después de sugerencias, aunque en este caso con generalizaciones en la serie. Veamos primero un caso intermedio entre los niveles IIA y IIB:

JOS (8;6) acierta inmediatamente las operaciones *A* (1) con los dos materiales y, en el caso de la operación C, tiene él mismo la idea de obtenerla por composición, puesto que se trata de una rotación doble: "*Hay que ir a 2 y 3*", pero como vemos, se equivoca (hubiera tenido que ir a 1 y 2) y descubre que 3 basta. Pero, cosa curiosa, cuando se cierra 3, cree entonces que "*no se puede*" y hay que hacerle recordar: "¿Y si se va a los otros garajes? — *Sí, a 1 y después ... a 2* (prueba). *Sí, es correcto.*" Pero para obtener *A* con 1 cerrado, no generaliza todavía: "*Hay que ir a 2 y hacer una vuelta doble* (por tanto, la inversión de la inversión: prueba). *¡Ah! ¡No cambia para nada!*" Por el contrario, una que lo logra, lo generaliza enseguida, y para II (idéntico) dice inmediatamente: *Hay que ir a 1, después a 2 y luego a 3: así* (lo muestra)."

Y ahora algunos ejemplos del nivel IIB:

CAR (10;2) acierta inmediatamente *C*, y después *A*. "¿Y si está cerrado? — *No se puede.* — ¿No hay otros medios? — *Si se hace como antes, no se puede.* — ¿Y con 2 garajes? — ... — ¿Y si entro en 2 y después salgo y voy a 3? — *¡Ah!, sí.* — ¿Ahora así (*D*, idéntico)? — (Sin dudar Car hace 1 + 2 + 3.) *Es correcto.* — ¿Cómo sabes que es correcto? — *No sé: es así.*" Pero Car, admitiendo que se pueden hacer las mismas operaciones con el material II, agrega: "*Si se puede saber cómo es el derecho y el revés y lo que hay a la izquierda y a la derecha, está bien.*"

FRA (10;3) está más adelantado que Car y anuncia finalmente el estadio III: después de triunfos inmediatos en las operaciones simples, pregunta para *D*: "*¿Se puede pasar por varios garajes? —* Sí, ¿Entonces? *— Hay que ir a 2 y después a 3.*" Reflexiona un momento y después agrega 1, pero no cree que se pueda cambiar el orden. Con el segundo material generaliza, y para 3 cerrado = 1 + 2 explica: "*En 1 invertí el sentido del bulto y en 2 lo volví a dar vuelta: es como dar vuelta los ladrillos en 3.*"

En cuanto al estadio III, los sujetos hallan todas las composiciones de 2 ó 3 operaciones, admiten, sin necesidad de probar, que son conmutativas y dan la explicación de lo que hicieron, a la manera de Fra cuando alcanza este último nivel:

BAR (12;3) para 3 cerrado no pregunta nada y efectúa inmediatamente 2 + 1. "¿Se podría hacer 1 + 2? — *Sí.*" Para 1 cerrado reflexiona un instante y hace 2 + 3. Del mismo modo, para *D* comprende al instante 1 + 2 + 3. "Y 3 + 2 +1? — *Sí, vimos que era lo mismo*". Con el material II, los mismos aciertos, y cuando se le pide la explicación de 1 + 2 + 3 = *D*, describe las operaciones detallándolas con gestos: "*Di vuelta así...* ", etcétera.

De tal modo se completa este desarrollo en el nivel en que se constituye el grupo INRC. Nos quedan todavía por precisar las relaciones entre los dos tipos de estructuras.

§ 5 | CONCLUSIONES. — La cuatro situaciones *A*, *B*, *C*, *D* corresponden a los garajes 1, 2, 3, y en el regreso al estado inicial significan: *A* = una rotación horizontal pero sin rotación vertical (es decir, " α no-ß" donde α y ß podrían ser clases o proposiciones); *B* = una rotación vertical sin rotación horizontal (es decir, "no- α y ß"); *C* = las dos rotaciones a la vez (es decir, " α y ß"), y *D* = ninguna rotación = el estado inicial o el retorno a ese punto (es decir, "ni α ni ß"). Como las rotaciones de 180° constituyen inversiones, las cuatro asociaciones básicas en cuestión pueden, pues, ser formuladas en términos de clases de inversiones o de proposiciones que las expresan (*pq*, *p no-q*, etc.). Nos limitaremos a describirlos como se indica a continuación, el símbolo — significa una inversión (de 180°) y el símbolo 0 = no inversión—:

D = 00; A (1) = 0—; B (2) = —0; C (3) = — —.

Las composiciones de dos o tres de estas parejas (de clases o de proposiciones), alcanzadas de modo inmediato en el estadio III, son entonces:

1 + 2 = 3 porque (0 —) + (— 0) = (— —)

1 + 3 = 2 porque (0 —) + (— —) = (— 0).

En efecto (—) x (—) = +, pero + significa el retorno al estado inicial, esto es, "no inversión", lo que simbolizamos mediante "0".

2 + 3 = 1 porque (— 0) + (— —) = (0 —)

1 + 2 + 3 = D

porque (0 —) + (— 0) + (— —) = (00).

Vemos entonces que estas composiciones constituyen un grupo de cuaternalidad o grupo de Klein. Pero cada una de ellas consiste simplemente

en ligar 2 ó 3 parejas, es decir, construir los isomorfos de lo que serían operaciones proporcionales tales como ("*p.q* o *p. no-q*"), o también ("*p. no-q* o *ni p ni q*"), etcétera. En estos casos, en cambio no intervienen transformaciones de "tipo" más elevado referentes a esas operaciones compuestas; dicho de otro modo, no se encuentra el equivalente de los operadores de potencia superior *N,R,C* e *I*.

En cambio, sería fácil extraer de las mismas cuatro asociaciones básicas (00), (0 —), (— 0) y (— —) los grupos *INRC* basándose en las diez y seis operaciones posibles de su "conjunto de partes". Daremos un ejemplo a partir de la conjunción (— —), que significa "las dos rotaciones a la vez". En este caso, la negación *N* conduciría a (0 —) $\vee$ (— 0) $\vee$ (00), es decir "una sin la otra o ni la una ni la otra", es decir, la incompatibilidad. La recíproca *R*, por el contrario, estaría constituída por (00), es decir, la negación conjunta "ni la una ni la otra". Por último, la correlativa *C*, o negación de la recíproca, sería "(— —) $\vee$ (0 —) $\vee$ (— 0), es decir, la disyunción. Tenemos entonces el grupo *INRC*, esto es, $NR = C$, $CR = N$, $NC = R$ y $NRC = I$. Destaquemos además que en este ejemplo posible, la negación *N* o incompatibilidad es también una negación de la operación como tal (conjunción), mientras que la recíproca *R* es la de sus términos ("ni el uno ni el otro"). Del mismo modo, se podrían combinar las cuatro asociaciones básicas con otras cuaternas isomorfas a las implicaciones, las equivalencias, etcétera, pero ello considerando siempre el "conjunto de partes" y no las composiciones elementales que se ha solicitado ejecutar, y que sólo equivalen a operaciones proporcionales sin sus transformaciones según *N, R* y *C*.

Pero, desde el punto de vista psicológico, resulta claro que cuando el niño del estadio III llega a ser capaz de describir el detalle de las rotaciones y de sus composiciones por parejas o tripletes, podra distinguir también las transformaciones *N, R* y *C*. Dirá, por ejemplo, para *N*: "Cuando no hago las dos rotaciones a la vez hago solamente una sin la otra o ni la una ni la otra". Y para *R*: "Lo contrario de las dos rotaciones es ni la una ni la otra", y para *C*: "Si no hago ni la una ni la otra, hago las dos o una sin la otra", (*) etcétera. Parece, pues, casi evidente que las abstracciones reflexionantes y las generalizaciones que comporta el manejo del grupo *INRC*, es decir (importa precisarlo aquí como lo hemos hecho siempre) su utilización en la solución de los problemas (acciones y reacciones, etc.) y no su toma de conciencia o abstracción reflexiva en tanto estructura, son preparadas por las abstracciones sucesivas a las que dan lugar las formas elementales del grupo Klein. En efecto: gracias a estas últimas el sujeto aprende a manipular las cuatro asociaciones básicas (α y ß, α y no-ß, no- α y ß, ni α ni ß) y a reunirlas de a dos en dos o en tres, lo que equivale a la constitución de las operaciones proposicionales. Basta entonces con una generalización de esta combinatoria naciente para dominar (pero, repitámoslo en el detalle de los razonamientos particulares y no de manera reflexiva) el "conjunto de partes" y llegar así al grupo *INRC*.

(*) Es lo que hemos verificado, sin que haya necesidad de entrar en el detalle de estos hechos. Simplemente cabe notar que la recíproca, en el caso en que se trata de hallar que "lo contrario" de las dos rotaciones es "ni una ni otra", parece más difícil de determinar que la negación en el sentido de la complementariedad. Pero como interviene aquí un problema previo e importante relacionado con el vocabulario, se necesitarán otras investigaciones al respecto.

Vayamos a la forma sin duda más elemental del grupo de Klein, es decir, al paso de un casillero a otro en una matriz multiplicativa (*A y B*) (*A no-B*) (*No-B* y *A*) (*ni A ni B*) donde *A* y *B* no son sino objetos o clases (con sus cualidades), sin otra transformación que la de introducirlos o quitarlos (o también abrir y cerrar, en el caso de una puerta).

El primer dispositivo consiste en un puerto con cuatro dársenas: la primera, 1, en la que no hay nada; en la num. 2 hay un barco rojo que carga y descarga piedras blancas (o azúcar); en la núm. 3, un barco amarillo que carga y descarga piedras negras (o carbón); y en la núm. 4 se hallan los dos tipos de piedras y los dos barcos cargan o descargan al mismo tiempo. Los dos barcos entran siempre juntos en el puerto, y se plantean problemas de este tipo: "El amarillo está lleno, y el rojo, está vacío. Queremos que a la salida estén los dos llenos. ¿Qué debemos hacer?" También se le pide al sujeto que indique diferentes maneras de proceder; por ejemplo, si una de las dársenas está cerrada. A continuación se le pregunta acerca del orden, para ver si lo juzga inoperante, después, acerca de la operación idéntica (salida en el mismo estado que en la entrada pero después de transformaciones) y de la involución (dos operaciones que se invierten).

Las operaciones precedentes presentan una estructura de grupo. Se utiliza después, para que el niño compare, una prueba desprovista de esa estructura: un corredor da a cuatro compartimientos o "bodegas", una contiene harina blanca, otra carbón, la tercera agua y la cuarta, nada: se introducen aquí un gato blanco y un gato negro, que entonces pueden cambiar de color. Se plantean problemas análogos a los formulados a propósito de los barcos pero sobre todo se le pide al sujeto que compare las dos situaciones e indique las semejanzas y las diferencias.

Ahora bien: existe una diferencia esencial: los gatos deben andar siempre juntos (cosa que el sujeto no olvida y se le recuerda sin cesar), de manera que no se pueden permutar los colores del gato blanco y del negro, mientras que, en el caso de los barcos, uno de los dos puede vaciarse cuando el otro se llena e inversamente.

Un tercer dispositivo consiste en una caja mecánica accionada mediante cuatro botones y con dos puertas, una amarilla y la otra roja. El primer botón no produce nada, el núm. 2 abre o cierra la puerta amarilla, el núm. 3 hace lo mismo con la puerta roja y el núm. 4 abre o cierra las dos puertas juntas. La situación es, pues, isomorfa a la de los barcos y los problemas se corresponden. Una vez concluido el examen, se pide que se hagan nuevas comparaciones con las pruebas precedentes.

§ 6 | LOS ESTADIOS I Y II. — Es inútil insistir en el estadio preoperatorio I (5-6 años), en el que el sujeto acierta en las operaciones simples (cargar, descargar, cambiar de color, etc.) en la medida (variable) en que conserva en su memoria las condiciones indicadas, pero sin ser capaz de componer dos operaciones.

MIC (6;2) indica más o menos bien lo que hay que hacer para llenar o vaciar los barcos, pero no sucede lo mismo cuando una de las dársenas está cerrada: "Están los dos llenos y se desea que estén vacíos: ¿adónde ir? — (Indica correctamente la dársena 4.) — ¿Y si no pueden entrar ahí (4)? — *Allá* (2). — ¿Qué hacen? — *Se vacían*". Después de la prueba de los gatos se pregunta si "los juegos se parecen. — *No.* — ¿Qué tienen de diferente? — *Nada*".

CAL (6;2): "Los dos están llenos, se desea que estén vacíos y el puerto de allá (4) está cerrado. — ... —¿No se puede en otros puertos? — *No*". Las puertas: "Se desea que las dos estén abiertas. — *Con eso* (4). — ¿Y sin ese botón? — ... —¿Puedes? —*No*".

A partir del nivel IIA, en cambio, encontramos que la mayoría de los sujetos acierta en las composiciones pedidas, pero fracasa en las comparaciones de estructura y a veces en los problemas de orden y de involución:

BAD (7;1) "Los dos barcos están vacíos y queremos que estén llenos. —*Aquéllos dos de allá* (4). — ¿Y de otra manera? —*El rojo toma azúcar allá* (2) *y el amarillo después toma carbón allá* (3). — Los dos están llenos y queremos que también lo estén al final. — *El amarillo descarga carbón aquí* (3) *y allá* (2) *el rojo descarga* (el azúcar) *y después allá* (4) *el amarillo toma* (carbón) *y el rojo toma azúcar.* — ¿Y se puede obtener lo mismo de otra manera? —*Los dos* (barcos) *allá* (4)*: el amarillo y el rojo se descargan y el rojo toma allá* (2) *azúcar y allá* (3) *el amarillo toma carbón.* — ¿Y de otra manera? —*No*". Falta, por el contrario, la involución. Después de la prueba de los gatos, piensa que es "*lo mismo*" que la de los barcos. En el caso de las puertas, acierta en la involución: "La roja está abierta y la amarilla cerrada, y queremos obtener lo mismo. ¿Cuáles botones hay que pulsar? —*Aquél* (1= sin cambios). — ¿Y de otra manera? —*No.* —Piensa bien. — *Girar la amarilla* (2): *dos veces la amarilla...* —¿Y acá (4)? — *Lo mismo: La roja se cierra y la amarilla se abre y luego la roja se vuelve a abrir y la amarilla se cierra.* — ¿Y así? (se cambia el orden de una secuencia). —*Lo mismo.* "Comparación final: ¿Hay juegos que se parecen? — *No.* — ¿Todos son diferentes? — *Sí.* —¿Hay alguno que se parezca más a aquél (barcos)? — *No.* — ¿Y aquél (gatos)? — *No*".

FRA (7;6) advierte inmediatamente dos maneras diferentes de vaciar los barcos llenos. Después: "Los dos están llenos. Deseamos obtener eso mismo. — *Se van a vaciar allá* (4) *y después se llenarán allá* (2) *y allá* (3). — ¿Y si se cambia el orden resulta lo mismo? —*No.* (Prueba) *Sí.* — ¿Y así (otro cambio)? — *Sí*". Involución: "¿Y si se entra una vez aquí (3)? —*El amarillo se vacía.* — ¿Y si entra una vez más? — *De nuevo estará lleno.* — ¿Y aquí (4) también? —*No... Sí.*" Después de los gatos: "¿Hay algo parecido? —*Los juegos son diferentes.* — ¿Por qué? —*Allá* (gatos) *hay un cuadrado* (dispositivo general) *y allá* (barcos) *hay agua por todas partes.* — ¿Pero jugaste de la misma manera? —*No, allá hay cajas y acá agua*". Puertas: acierto total.

CAR (7;2) "Los dos barcos están vacíos y deseamos que al final los dos sigan estando vacíos. —*Aquél* (amarillo) *se va a llenar allí* (3), *y después el rojo aquí* (2) *y luego se vuelven a vaciar allá* (4). — ¿Y si hacemos 4, 3, 2? — *Así cambia.* — ¿Por qué? — *Se llenan aquí* (4), *después aquí* (3) *el amarillo se vacía y después también el rojo se vacía aquí* (2).— ¿Entonces es lo mismo? — *Sí.* — ¿Y así (2, 3, 4)? — *Lo mismo*". Comparación con los gatos: "*Son diferentes: allá hay barcos y acá gatos*". Se intenta insistir en las acciones y los resultados: "*No, porque hay* (en el caso de los barcos) *uno amarillo y uno rojo y allá* (gatos) *uno negro y uno blanco*".

LUP (8;8), los mismos aciertos. Comparaciones: "*Los dos juegos son iguales.* — ¿Por qué? — *Porque tenemos siempre lo mismo* (barcos) *y aquí* (gatos) *lo mismo una vez* (negros). — ¿Cuáles son las diferencias? — *Los gatos entran en el carbón y después en el agua. Los barcos ya están en el agua.* — ¿Hay otras diferencias? —

Los gatos se vuelven negros y acá no''. Comparación general: (*) ¿Hay dos que se parecen? —*Esos dos* (gatos y barcos) *y estos dos* (puertas y disco). — ¿Cuál se parece más a éste (puertas)? —*Ninguno''.*

CLA (8;11) Comparación barcos-gatos: *''Es lo mismo. Si se entra dos veces aquí, los gatos salen negros. Si los barcos entran dos veces aquí* (3: piedras negras) *salen como antes.* — ¿No hay diferencias? —*Aquí, los barcos se llevan* (algo) *y allá los gatos cambian de color''.* Comparación general: puertas y barcos: *''es lo mismo'';* gatos y puertas también, disco y barcos, no.

HAS (8;6) Barcos y gatos: *''Es el mismo tipo de juego.* — ¿No hay diferencias? — *No.* — ¿Con los barcos se puede tener lo contrario, uno se vacía cuando el otro se llena o a la inversa? — *Sí.* — ¿Y con los gatos? — *No.* — ¿Hay otras diferencias? —*Es la única.*

NIC (8;5): *''Es exactamente el mismo juego, pero allá hay barcos y acá cajas* — Piensa en lo que pudiste hacer — ... — ¿Pudiste hacer todo con los gatos? — *No hay diferencia, salvo que acá hay un puerto,* etcétera. — ¿Para obtener lo contrario, pudiste haberlo hecho aquí (gatos)? — *No.* — ¿Y aquí (barcos)? — *Sí.''* — Comparación general: ''¿Hay juegos que se parecen? — *Sí, porque allá hay un barco rojo y uno amarillo, y acá, una puerta amarilla y una roja.* — ¿Hay otras semejanzas? — *El que sean dos, porque son dos gatos y dos barcos''.*

SIM (8;4). Barcos y gatos: *''Es casi lo mismo.* — ¿Se puede hacer lo mismo con los dos? —*No, los barcos a la salida podían tener otros colores* (los de carga) *y los gatos, no.* — Cuando los barcos entran dos veces en el mismo puerto, ¿es lo mismo que antes? —*Sí.* — ¿Y los gatos? —*No.* — ¿Cómo son? —*Dos veces negros''.*

Lo interesante en estos hechos es, en primer lugar, la edad en que se logran realizar las diversas operaciones pedidas, todavía fallidas en el nivel preoperatorio, pero dominadas desde los 7 años como término medio. No es algo fortuito porque ése es el nivel de la construcción espontánea de las clasificaciones multiplicativas, o tablas de doble entrada: (*A.B*), *A.* (*no-B*) (*no-A* y *B*) y (*ni A ni B*). Ahora bien: el problema de los barcos (y el de las puertas) descansa enteramente en una estructura así, mientras que las operaciones del grupo de Klein sólo consisten en pasar de uno de los cuatro casilleros a otro, con las siguientes significaciones: *A* = presencia y, por tanto, posible cambio del elemento (como las piedras negras); *no-A* = ausencia de *A* y, por tanto, falta de cambios posibles (cargar o descargar); *B* = presencia y cambio posible del otro elemento (piedras blancas), y *no-B:* ausencia y, por tanto, posible no-modificación de *B.* En cuanto a las operaciones, sólo consisten en reciprocidades, según las diagonales si la tabla es cuadrada: por ejemplo, paso de (*A.B.*) a (*no-A*).(*no-B*) o a la inversa; y en semi-reciprocidades según los trayectos verticales u horizontales de una tabla cuadrada: paso de (*A.B*) a *A.* (*no-B*) o a (*no-A*).*B,* etcétera. Este grupo cuaterno supone, pues, otra cosa que la actualización, por abstracción reflexionante, de las mismas operaciones

(*) Debe advertirse en este punto que se ha agregado una cuarta prueba, no considerada aquí porque se refiere a un grupo cíclico, en la cual se regulan mediante botones las rotaciones de un disco.

que el sujeto utiliza cuando construye una clasificación doble o matriz multiplicativa. Es entonces instructivo comprobar que esta actualización, con la forma de operaciones separadas o coordinadas de diversas maneras (véanse los cambios de trayecto o los retornos al punto de partida idéntico en Bad, Fra, etc.), se produce desde el nivel en que el sujeto las emplea globalmente cuando se limita a clasificar concretamente los objetos según las dos dimensiones de una tabla de doble entrada.

Pero, si bien hay allí un notable ejemplo de abstracción reflexionante, ésta no conduce de ningún modo a una abstracción reflexionada, es decir, a una toma de conciencia de estas operaciones que entonces serían tematizadas transformándose en objetos de pensamiento, tras haber sido efectuadas sólo a título de instrumentos para alcanzar un resultado. Respecto de esto, las comparaciones requeridas entre las diversas pruebas, aunque acertadas, son muy significativas. Los sujetos de 7 años todavía reaccionan como en los niveles preoperatorios: no hay ninguna semejanza entre los juegos porque el material es distinto; no se diferencia la forma de las operaciones de su contenido. Los sujetos de 8 años, en cambio, comienzan a pensar en las acciones en sí mismas y, por tanto, en un comienzo de las formas, pero, de todos modos, no perciben, para nada las diferencias de estructuras, cuya inversión es posible en el caso de los barcos y no en el de los gatos: todo les parece semejante, y si se insiste en las diferencias, reinciden en las de los contenidos (colores, lugares, etc.). Sin embargo, si se les pregunta acerca de la reversibilidad, reconocen la oposición (véanse Has, Nic y Sim) pero por sí mismos no le atribuyen ninguna importancia, sin ver que hay allí una distinción esencial de estructura. En una palabra: saben obrar de modo adecuado, lo que supone una abstracción reflexionante no consciente a partir de sus capacidades anteriores de efectuar construcciones concretas, pero no extraen ninguna abstracción "reflexionada".

§ 7 | LOS NIVELES IIB Y III. — En el subestadio IIB (9-10 años), se hallan todavía muchos residuos del tipo precedente de comparaciones, pero se advierte un progreso en el sentido de que el sujeto adquiere el sentimiento de una diferencia de estructura entre el problema de los barcos y el de los gatos, pero todavía sin poder localizarla en el punto central de las operaciones inversas:

RAC (9;3): "*Es lo mismo: allá* (barcos) *están obligados a separarse y aquí* (gatos), *no. Allí van uno detrás del otro y aquí los dos juntos*". Es lo que impide las inversiones en el caso de los gatos, pero Rac no lo deduce, aunque sabe responder a las preguntas más detalladas: "¿Y si los barcos entran dos veces en el mismo puerto? — *Estarán vacíos.* — ¿Lo mismo que al comienzo? — *Sí.* — ¿Y allá (gatos)? — *Negros*".

REN (10;8) dice de los barcos y las puertas: "*Son exactamente lo mismo*" e indica con precisión la correspondencia entre cada botón y cada dársena del puerto. Pero, en relación con los gatos, "*Falta que estén los dos juntos, el carbón y la harina*", esto es, el casillero *A.B.*; de ahí la falta de correspondencia en las composiciones, pero sin alusión espontánea a la reversibilidad.

BAB (11;2) del mismo modo: "*Es lo mismo... porque hay aquí* (barcos) *un puerto que vale dos* ($AB = A$ *no-B* $+$ *no-A y B*)" y no ocurre así en el caso de los gatos.

En el estadio III, finalmente, encontramos respuestas que extraen explícitamente la reversibilidad en el caso de los barcos y de las puertas por oposición a los gatos:

REL (11;6): "*Los barcos pueden invertirse, pero los gatos no*".

MAX (11;6): "*Los gatos pueden cambiar de color, mientras que los barcos pueden cambiar la carga*".

AGO (11;9): "*Allá* (barcos) *se puede tener lo contrario, acá no*".

DUB (12;6): "¿Se pudo hacer todo con los dos juegos? —*Los gatos no pueden salir como antes* (inversión de la inversión)".

Es sorprendente que la reversibilidad, cuya formación ha sido ciertamente ardua, en el curso de los estadios preoperatorios, pero cuya utilización se torna general en casi todos los dominios a partir del nivel IIA, de 7-8 años, sólo de lugar a una abstracción reflexionada en el estadio III, que es el de las "reflexiones de reflexiones". En el caso de las rotaciones de la sección I de este capítulo, es solamente en el estadio III donde se constituyen en forma inmediata las composiciones entre parejas (tales como — — o 0 — , etc.), mientras que con las transformaciones mucho más simples y de reversibilidad de tipo elemental (introducir o quitar), que caracterizan a las presentes pruebas, esas composiciones entre parejas resultan fáciles desde el nivel IIA. Pero en los dos casos la abstracción reflexionada (descripción detallada de las acciones propias en el caso de las composiciones de rotaciones de la sección I y comparación entre las pruebas en lo que se acaba de ver) no se constituye hasta el estadio III. Este hecho sugiere que para llegar al grupo *INRC* (en su utilización y, por supuesto, no en tanto representación reflexiva de esta estructura) el sujeto necesita abstracciones reflexionadas para distinguir las diversas composiciones en juego en los "conjuntos de partes", y especialmente para diferenciar las situaciones de inversión *N* y de reciprocidad *R*: de ahí su formación tardía en el estadio III solamente. En este sentido las presentes comprobaciones nos han proporcionado una útil información complementaria en relación con los de la sección I.

ÍNDICE

Este libro se terminó de imprimir en
TALLERES GRÁFICOS INDUGRAF
Mendoza 1523, Lanús Oeste (Prov. de Bs. As.)
República Argentina

Abril 1979. Tirada 4000 ejemplares

Colección Temas Básicos

Traducción
Alicia Entel
La revisión de la obra estuvo a cargo de
Eduardo Sinnott
Tapa
Departamento de Arte
EDITORIAL CREA S.A. (Área Libros)

Jean Piaget

Investigaciones sobre la abstracción reflexionante

II
La abstracción del orden y de las relaciones espaciales

con la colaboración de Ed. Ackermann,
A. Blanchet, J. P. Bronckart,
J. Cambon, N. Cox, J. Cuaz, S. Dayan,
E. Deckers, J. J. Ducret, M. A. e I. Fluckiger,
J. de Lannoy, M. Lavallée, Cl. Monnier,
E. Rappe du Cher, M. Solé-Sugranes, M. Spycher,
Th. Vergopoulo y Cl. Voelin.

Título del original en francés
Recherches sur l'abstraction réfléchissante
Impreso en la Argentina
Printed in Argentina
Queda hecho el depósito
que marca la ley 11 723

Av. Belgrano 624, Buenos Aires.

SEGUNDA PARTE

LA ABSTRACCIÓN DEL ORDEN

Las relaciones de orden están emprendidas naturalmente en las estructuras lógico-aritméticas y aun en las estructuras lógico-matemáticas en general (pues el orden interviene en geometría, como en el caso del grupo de los desplazamientos). Pero caracterizan a una estructura aparte, e incluso a una "estructura madre" en el sentido de Bonrbaki, distinta de las estructuras algebraicas que predominan en los problemas estudiados en la Parte I de esta obra. Conviene, por tanto, dedicarle una parte especial, en razón de su importancia.

Pero desde el punto de vista de los problemas de abstracción se agrega una consideración particular, a saber: siempre nos ha parecido que constituye el producto por excelencia de la abstracción reflexionante. En efecto: desde hace tiempo hemos intentado mostrar que hasta en los niveles más elementales, el esquema del orden no se adquiere por la simple observación de series ordenadas, pues, para comprobar la existencia de un orden, es necesario en principio que también las acciones del sujeto requeridas para esa lectura (seguir con los ojos, con el dedo, etc.) estén ordenadas. Al estudiar en nuestro Centro el aprendizaje de un orden, (*) D. Berlyne ha confirmado estas conclusiones admitiendo la necesidad que tiene el sujeto de disponer de un "contador" que llamaríamos, por nuestra parte, una actividad ordenadora.

En el presente estudio acerca de la abstracción conviene entonces retomar el problema examinando diversas formas elementales de seriación o de sucesión de movimientos, de manera de precisar las partes respectivas de las abstracciones empíricas y reflexionantes.

(*) Véase el vol. XII de los "Etudes" d'épistémologie génétique" (1960).

Series aditivas y exponenciales

EN COLABORACIÓN CON THALIA VERGOPOULO

En lo que sigue nos proponemos estudiar la parte que corresponde a la coordinación de acciones y a las lecturas perceptivas en el caso de la construcción de series aditivas y exponenciales, cuyos elementos son dados, después de su continuación con un material a elección. Más precisamente, quisiéramos analizar, en este caso particular, la naturaleza de la abstracción "pseudo-empírica". Recordemos que si la abstracción empírica extrae su información de los objetos y la abstracción reflexionante de la coordinación de acciones, la abstracción pseudo-empírica consiste en aprehender las propiedades presentadas por un objeto pero introducidas en él por acciones anteriores del mismo sujeto o por cualquier otro sujeto. El problema que a este respecto trataremos consiste en establecer si la abstracción pseudo-empírica se reduce a una lectura directa de ciertos caracteres elegidos en el objeto en función del problema planteado, o si esta lectura, por el hecho de que se trata de caracteres introducidos en el objeto por un sujeto, se vincula de algún modo con la capacidad del sujeto para actuar sobre ese objeto y de conferirle por medio de esa acción los caracteres en juego. En el caso de ciertas abstracciones empíricas, el problema no se plantea: no es necesario que el sujeto sepa pintar algo de color verde para que pueda advertir que las hojas de los árboles son verdes. En el caso de las propiedades espaciales del objeto puede condicionar el registro de ciertas relaciones espaciales que pertenecen también al objeto. En las situaciones estudiadas precedentemente, como la comprensión de las inclusiones en un conjunto de flores (cap. I), el problema queda sin decidir porque es demasiado sencillo en cualquier edad

hacer un ramo de margaritas y de rosas. Para estudiar nuestro problema de manera tal que fuese posible establecerlo, hicimos comparar dos conjuntos de elementos seriables de dos formas: una, *A*, aditiva (varillas de 2, 4, 6, y 10 cms), el otro, *B*, exponencial (2, 4, 8, 16, 32 cms), y distribuir las acciones en dos etapas, una simplemente exploratoria (reunir a voluntad los dos conjuntos presentados en desorden), y la otra más verdaderamente constructiva (continuar las series una vez puestas en "escaleras"), con descripción de las semejanzas y diferencias después de cada etapa.

La técnica adoptada es muy simple. Se presentan los dos conjuntos en desorden y se le pide al niño que los reúna como le parece. Si el sujeto no hace series por sí mismo (son generales desde el nivel IIA), se le sugieren después de algunas construcciones suyas. Luego se le pregunta en qué se parecen los dos montones, y en qué difieren. Después de esto, se trata de continuar las dos series con un material por elegir, tanto por el lado descendente (<2 cm) como por el ascendente, y, una vez terminados los ensayos, se vuelve a preguntar por las semejanzas y las diferencias entre *A* y *B*. Con cierto número de sujetos se intentó una seriación con un término constante intercalado entre las variables (7, 2, 7, 4, 7, 6, 7, 8), pero este ensayo no proporcionó nada instructivo. En lugar de ello, a los sujetos de cierto nivel se les presenta por último, una caja que contiene una serie exponencial que hay que continuar (15, 1/2, 15, 14, 12 cm...) y cuya complementaria debe encontrar a continuación (1/2, 1, 2, 4,...), en los dos casos con dibujo de la línea de las partes más altas (exponencial convexa o cóncava).

§ 1 | EL ESTADIO I. — Los sujetos de un primer nivel no construyen por sí mismos las "escaleras", sino que comienzan por algunas figuras. Una vez halladas (o aceptadas) las seriaciones ven las semejanzas y diferencias sólo de modo muy global, y cuando se trata de continuarlas se apartan de ello sin darse cuenta de las líneas básicas y rechazando sistemáticamente los elementos muy grandes:

RAG (4;7) comienza con casas. Las escaleras (sugeridas) no son *"la misma cosa"*, — ¿Por qué? — *No sé.* — ¿Y para continuar? — (Arrima un 32 contra el elemento de 32.) — ¿Pero no sube? — *Así* (lo alza). — ¿Y aquí (base)? ¿El agujero? — *Tanto peor para el agujero.* — ¿Y allá (serie A)? — (Agrega un elemento de 8 y lo hace sobresalir por arriba.) — ¿Son los mismos? — *No.* — ¿Por qué no los mismos? — *Aquí* (A) *hay más* (los cuenta). *¡Ah! no. En la clase hay de éstos* (A)". Se hacen efectivamente ejercicios de seriación.

ISA (5;3) acepta las escaleras después de algunas figuras. "¿Son parecidos? — *No, porque aquí (B) el 3° y el 4° son más grandes que allá (A).*" En cuanto a las continuaciones, Isa se esfuerza por hacerlas homogéneas en *A* y en *B*: "Es lo mismo: *aquí* (comienzos) *pequeña, después mediana, mediana, mediana, después grande.*" Para *A* prolonga la serie sin ocuparse de la diferencia constante de 2 cm, y para *B* rechaza los grandes elementos: "¿Se podría? — *Sí, pero no quiero.*"

JEQ (5;10): *"Las regletas son las mismas, las dos son escaleras, pero allí hay uno* (palo) *muy grande y acá uno más pequeño.* ¿Cómo se puede continuar (*A*)? — *Con los más grandes, una vez más grande* (mide con sus dedos y conserva los intervalos). (*)

(*) Nosotros llamamos intervalos las diferencias entre elementos sucesivos = 2 cm en *A*.

— ¿Y allá (B)? — *¡Ah!, allá son grandes y las otras muy grandes.* "Agrega una con un intervalo de aproximadamente 4 cm sin ocuparse de la línea de base y aparta las otras: "*No, son demasiado grandes.*" Conclusión: "*Hay escaleras, pero no las mismas: no tienen ni el mismo color ni el mismo tamaño.*"

JEA (6;8): "*Se ve que las regletas tienen las mismas formas: una grande, después una mediana, una más pequeña y una pequeñita en cada montón.* — ¿Y en qué no se parecen? — *No tienen el mismo color.*" Continuación de *A*: "*Una más grande y la siguiente un poco más* (conserva en primer lugar el intervalo de 3 cm, al que señala con el dedo, después ya no piensa en él y lo aumenta). — ¿Y allá? (*B*). — (Más grandes, al azar.) = ¿Y aquella (el doble)? = *No, es demasiado grande* (contrariado)."

CEN (6;6) con las escaleras en orden descendente: "*Se comienza por el más grande, después más pequeño, todavía más pequeño, más pequeño aún y muy pequeño.* — ¿En qué se parecen? — *Son como los peldaños de la escalera.* — ¿En qué no se parecen? — *La primera es muy grande, aquella* (*B*), *la otra* (*A*) *más pequeña.*" Continuaciones en orden creciente: para *A* conserva el intervalo, y para *B* "*se necesita una regleta larga* (toma otra de 32 cms y la hace sobrepasar). "*Se necesita una más grande*" (intervalo de 2 cms como en *A*). En orden decreciente para *B*: termina por 2, 1, 1/2 y 1/4 "*porque no se puede poner así y así* (intervalos de 2 cm)". Naturalmente rechaza el cero y el paso a los valores por debajo de la línea de base (0).

Salvo Rag, que no llega a expresar la diferencia entre las series *A* y *B*, aunque se la percibe, estos sujetos notan que la oposición depende de la presencia de grandes elementos en *B*, pero con excepción de Jeq, que tuvo la idea de medir con los dedos el intervalo en *A*, todos se esfuerzan por prolongar las series *A* y *B* de manera homogénea (intervalos análogos). Lo que sorprende en estas reacciones es, pues, que la abstracción pseudoempírica en juego (y por tanto, la lectura de los rasgos observables en los cinco primeros elementos dados inicialmente) es en esencia función del modo de construcción de las series, adoptado por el sujeto en su acción propia: lo que procura obtener es simplemente una serie calificada como "pequeña, después mediana, después grande" (Isa o Jea y Cen, en orden descendente) sin ocuparse de los valores cuantitativos. En cuanto a Jeq, es todavía su acción lo que lo condujo a un comienzo de cuantificación pero que continúa siendo muy cualitativa (línea perceptiva de las partes más altas descuidando la base y apartando los "demasiado grandes")

§ 2 | EL NIVEL IIA. — En el nivel siguiente (7-8 años), el progreso notable consiste en que el sujeto aprehende la diferencia entre las series *A* y *B* y reconoce la existencia en *B* de intervalos ya no iguales como en *A* sino de valores crecientes. Sólo que este aumento de las diferencias en *B* no es todavía métrico, y únicamente se hace explícito en el momento en que hay que prolongar las series con nuevos elementos:

CRO (7;2) ordena desde el comienzo las regletas "en escalera". "¿En qué se parecen esas escaleras? — *No se parecen porque acá son pequeños y allá, grandes* (los intervalos). — ¿Y en qué otra cosa no se parecen? — *No sé.* — ¿Y en qué se parecen? — *En nada: ¡mire esas distancias!* — ¿Y si se continúa aquí (*A*)? — *Debe*

(el que hay qué colocar a continuación) *llegar hasta allá* (señala aproximadamente 2 cm). ¿Cómo lo sabes? — *Lo veo.* — ¿Y allá (*B*)? — *¡Ah! no sé si se llegaría: el quinto es tan grande.* — Prueba. — *Otro va allá* (agrega sólo 5 cm). — ¿Y descendiendo (en *B*, debajo de 2)? — *Así* (1 cm), *y después así* (1/2) *y así* (1/4), *¿es correcto?* — ¿A ti qué te parece? — *Sí para (B), pero en (A) siempre debe ser así* (2 cms, de donde 10, 8, 6, 4, 2, 1/4). *No*, (quita 1/4) *nada*. — Entonces, ¿en qué se parecen (*A* y *B*)? — *En las escaleras.* — ¿Y dónde no se parecen? — *Acá* (*A*) *es siempre lo mismo, pero no allá* (señala el crecimiento de los intervalos en *B*)."

GAR (8;5). Diferencias: *en B "hay grandes, pero aquí (A) son más pequeños.* — Explica en qué se diferencian — *En los tamaños"*. Continuaciones: en A *"se agrega siempre el mismo pequeño espacio.* — ¿Y allá (*B*)? — *No es el mismo espacio: hay uno muy grande, pero no sé qué poner porque allá hay un espacio muy grande y allá uno muy pequeño"*. Ensaya al azar, y después comprende: *"¡Ah! ¡siempre hace falta un espacio mayor!* — ¿Y para bajar? — *Cada vez mayor* (que el mismo) *al subir y cada vez menor al bajar.* Entonces díme ahora: en las dos escaleras que viste, ¿cuáles son las diferencias? — *Aquí* (*A*) *siempre hay el mismo espacio entre las regletas, y en (B) había un espacio cada vez más grande."*

SAN (8;6) no llega a decir que *"esta escalera (B) es más grande que aquella (A)"*. Pero en el momento de la continuación descubre en A *"el mismo espacio.* — ¿Y aquí (*B*)?. — *Hay algunos que son más grandes que otros"*, mostrando el aumento.

REN (8;6) del mismo modo, en la descripción solo dice que "*aquellos* (los palos en B) *son más grandes que los otros"*, pero en sus intentos de continuación: *"Aquí* (en B) *el espacio es cada vez más grande, más grande."*

RIV (8;2): las mismas reacciones, pero a propósito de la cuantificación llega a la solución sólo después de la regleta de 32 cm: *"Si las juntara* (uno de 16 + uno de 32) *andaría bien."*

GIZ (8;8), por el contrario, se orienta hacia la cuantificación, pero aditiva. Antes, sólo llega a decir en su descripción: *"No son lo mismo, porque (B) es más alto que (A) : hay reglas grandes y (A) pequeñas.* — ¿Y en qué se parecen? — *Los pequeños* (de 2 cm = primer elemento de cada serie) *son parecidos a los dos y suben el mismo espacio.* — ¿Pero no son iguales? — *No, los colores* (son diferentes)." — Por el contrario, durante las continuaciones, "*imagino en mi cabeza que pongo un* (intervalo) *similar* (en *A*): *10 + 2 = 12.* — ¿Y aquí (*B*)? — *Me imagino que tomo uno así* (2 cm) *y cuanto más grande se vuelve más trozos pequeños hay que poner para que vaya hacia allá"* (intervalos crecientes). Pero para el exponencial decreciente, "*se debería poner la mitad de aquél* (32)..., *después la mitad de la mitad*", etcétera.

Contrariamente a los sujetos del estadio I, estos, durante la continuación de las series, no intentan homogeneizarlas sino, por el contrario, dar cuenta de las diferencias. Ahora bien, sólo al emprender esta acción descubren el aumento regular de los intervalos en *B*, mientras que ante la simple inspección de las escaleras, solo perciben la desigualdad de tamaño de los últimos elementos de *A* y de *B*, aunque tales escaleras fueron construidas por ellos mismos (y poseyeron esa forma desde el comienzo). Gir, el más avanzado de estos casos, afirma, incluso, que "suben del mismo modo", es decir, de manera que cada uno sea más grande que el precedente, pero sin

cuantificar los intervalos y sólo en el momento de la selección impuesta por la continuación se hace el descubrimiento: Gar expresa bien esta sorpresa cuando dice: "¡Ah! ¡Siempre hace falta un espacio más grande!"

§ 3 | LOS NIVELES IIB y III. — Desde los 9-10 años (con 3 casos avanzados de 6;6 y 7;9), el progreso consiste en una cuantificación de esos intervalos crecientes en *B*, mientras el sujeto llega a la noción de doble por vía aditiva y después multiplicativa, pero nuevamente solo durante la continuación de las series:

OLI (6;6), muy avanzado, descubre que en *A* "*es siempre el mismo fragmento el que sobrepasa.* — ¿Y en (*B*)? — *Dos así* (2 cm) *dan uno así* (4 cm). — ¿Y después? — *Dos así* (4 cm) *dan uno así* (8 cm); *dos así* (8 cm) *dan aquel* (16 cm) *y dos así dan el grande.* — ¿Y para (*A*) me dijiste que siempre sobrepasaba el mismo fragmento? — *Sí, mientras que aquí (B) da siempre dos enteros, da el siguiente*".

MIC (7;9): "¿Se parecen (*A* y *B*)? — *No en todo, no en el tamaño.* — ¿Pero en qué se parecen? — *Tienen el mismo orden, pero no el mismo tamaño. Los clasifiqué de más grande a más pequeño, pero esas maderas (B) no son las mismas que estas* (*A*)." Continuaciones: en *A* "*todos son más grandes que esto* (2 cm). — ¿Y aquí (*B*)? — *No es la misma diferencia que aquélla (2 cm)*". Tantea por evaluaciones perceptivas; después, frente a la idea de medir los intervalos por medio de un pequeño elemento de 2 cm: "*El pequeño es dos veces eso* (intervalo entre 4 y 8 cm); *después el pequeño es cuatro veces eso* (intervalo 8 - 16) *Y luego ocho veces* (intervalo 16 - 32)." Sin embargo, duda en prolongar ese sistema: "*Se irá muy arriba.* — ¿Y continuando el descenso (después de 8, 4, 2)? — *No se puede ¡Ah! Hay que poner la mitad del pequeño, después la mitad de la mitad y después la mitad.*"

SAR (7;9), las mismas reacciones, pero está dispuesta a continuar en *B* con "*dos veces eso* (32 cm) *y dos veces* (más). Pero se detiene también antes de que la escalera se haga muy grande: *no hay lugar tan grande para una escalera que no termina*". Esta restricción señala a la vez la comprensión implícita de una posible serie indefinida y las limitaciones del nivel de las operaciones "concretas".

GAL (9;8) "¿Se parecen (*A* y *B*)? — *No del todo porque aquí* (16-32) *hay diferencias más grandes.* ¿Entonces no se parecen para nada? — *Sí, un poco: ¡son escaleras!* "Continuación: 2 cm para *A*, después tantea para *B* y llega a la comprensión: "*Es el doble: esto es el doble de 2; (8) el doble de 4*", etcétera. En el descenso: "*la mitad de 2; después, medio centímetro y la mitad de medio centímetro.* — ¿Y después? — *No se puede más, se llega a tierra.*"

PHI (9;7): las mismas reacciones después de medir: "*Allá (B) hay que hacer el doble y acá (A) tomar la misma medida* (2 cm)." El descenso es correcto y para *A* continúa: "*2 debajo de cero, 4 debajo, etc.* — ¿Hay cifras inferiores a cero? — *Sí, mi padre es contador y me dijo que se pueden hacer cifras inferiores a cero.*"

Se advierte que el notable progreso constituido por la cuantificación de los intervalos de *B*, en un comienzo aditivo, después con dobles y mitades, aún se efectúa únicamente después de tanteos con miras a una continuación. Solo en el estadio III (11-12 años, con un caso avanzado de 9;10) se aprehende

esta relación a partir del examen de las series obtenidas por el ordenamiento inicial y antes de los intentos de continuación:

RIC (9;10): "¿En qué no se parecen? — *No tienen el mismo tamaño.* — ¿Otra cosa? — *Aquí (A) existen siempre las mismas diferencias y allá (B) es el doble.* — ¿Cómo lo sabes? — *Me doy cuenta mirando.*" Continuaciones y descenso correctos. Se obtienen (por primera vez) las exponenciales complementarias presentadas en una caja (16, 15 1/2, 14, 12, ...y 1/2, 1, 2, 4... ambas por continuar) y Ric dibuja correctamente las dos curvas de las cimas, convexa y cóncava: "*Es curva porque los escalones no tienen la misma altura.*"

RUC (10;9), antes de cualquier ensayo de continuación, advierte también que "*allá (B) no hay el mismo espacio: durante todo el tiempo el tamaño de los bloques es el doble, es decir que entra dos veces en el siguiente*". Exponenciales complementarios: solución correcta después de numerosos tanteos.

LUC (10;5) solo habla del "doble" en el momento de la continuación (prolonga 16, 32 en 64 y 128), pero vio a partir de la observación de las figuras que en *B*, "*acá (2-4) hay un espacio pequeño, allá (4-8) uno más grande y más allá uno todavía más grande*".

BOI (11;7) ve "*siempre el doble de la pequeña que precede*" en la anticipación de la continuación y antes de cualquier tanteo y medida porque "*se ve casi poco más o menos*". Los exponenciales complementarias son halladas después de errores.

CRI (12;6): "*El doble del que precede, siempre el doble.* — ¿Cómo lo sabes? — *Vi, comparé.* — ¿Y en el descenso? — *La mitad, la mitad de la mitad, etc.* — ¿Cuándo terminará eso? — *Hasta que no haya nada...* (pero) *si hubiera máquinas que hicieran micrones...*"

Hay, pues, en este nivel una medición de los intervalos crecientes o la comprensión de este crecimiento (Luc) a partir de la observación de las figuras o del proyecto de continuación.

§ 4 | CONCLUSIÓN. — En definitiva, en esta situación de seriación, la abstracción pseudo-empírica aparece como un caso particular de abstracción reflexionante: lo que el sujeto extrae de los objetos (además, naturalmente, de sus cualidades físicas registradas por abstracción empírica: diferencias de colores y de tamaños), son las propiedades que es capaz de introducir en ellos según su nivel de coordinación de acciones. Todos estos sujetos, cuando han construido "escaleras", ven que las regletas están ordenadas en orden creciente o decreciente. Por el contrario, las dos estructuras de la igualdad de los intervalos en *A* y de su crecimiento en *B* solo son percibidas en su diferencia cuando el sujeto puede construirlas. Sin embargo, esta diferencia es un rasgo observable como cualquier otro, dado en los objetos aunque introducido en ellos por un sujeto: en efecto, desde el estadio I, el niño ve claramente que en *B* hay palitos más grandes que en *A*, pero tiene tan poco en cuenta las diferencias de intervalos que intenta homogeneizar continuando las series. En el nivel IIA, los sujetos descubren su crecimiento en *B*, pero solo cuando intentan continuar la serie, mientras que, en la observación de las figuras, solo destacan el ordenamiento de los elementos

y no sus diferencias: "suben lo mismo" dice uno de ellos, de casi 9 años, aunque haya señalado ya al comienzo las diferencias de medida de los elementos grandes. En el nivel IIB el progreso cumplido por la cuantificación de esos intervalos en *B* y que testimonia un nivel de abstracción reflexionante más alto, no basta para provocar un registro en el objeto antes de la acción de continuación, incluso en lo que concierne a su simple crecimiento cualitativo antes de hallar la ley del doble. Es necesario llegar al estadio III para que la observación de las figuras permita extraer al primer intento las propiedades referentes tanto a los intervalos como a los elementos en sí.

Se dirá que todo esto es obvio, puesto que la percepción de los ramos de flores o de las tarjetas del capítulo V no bastan tampoco para hacer ver que el todo es más grande que la parte mientras el sujeto no ha construido una estructura de inclusión. Pero podía haberse esperado que una propiedad de carácter espacial y tan simple como una diferencia creciente de longitudes entre palitos diese lugar a una lectura inmediata cuando se ven tantos rasgos físicos observables más complejos, correctamente comprobados mucho antes de ser comprendidos. Es necesario, pues, admitir que relaciones lógico-matemáticas, y especialmente seriales, introducidas en los objetos solo son accesibles en ellos para un sujeto si él mismo es el encargado de realizar la operación o si es capaz de hacerla: ahora bien, la continuación de las series con los palitos que deben elegirse es algo muy distinto de su construcción con los elementos ya dados y por eso hay que esperar hasta el estadio III para que el niño, capaz de esta continuación, destaque las propiedades esenciales de las regletas que manipula en su construcción inicial (de 2 a 32).

Las condiciones de la lectura de series aditivas complejas

I / LECTURA Y CONTINUACIÓN DE SERIES DADAS

EN COLABORACIÓN CON J. CUAZ y J. CAMBON

Si la lectura de las propiedades de una serie exponencial presenta las dificultades que acabamos de ver, incluso a título de simples comprobaciones, se podría deber a su carácter exclusivamente métrico. Es, pues, conveniente examinar lo que sucede en el caso de series donde solo intervienen relaciones aditivas entre elementos discretos bajo la forma de adiciones numéricas o de alternancias variadas referentes a fichas o aun a la cantidad de lados de figuras geométricas. Estos problemas pueden parecer un poco simples y sobre todo demasiado conocidos, pero nos interesa analizar en sus formas elementales las relaciones entre la abstracción empírica que opera sobre el aspecto figurativo de las series, y los marcos de asimilación extraídos de la coordinación progresiva de las acciones.

El material consiste en primer lugar en fichas de 2 cm de diámetro, azules, *A*, y rojas, *R*, que se presentan en las dos partes de la experiencia según dos leyes diferentes: 1) *ARAARRARAA*... o sea 1, 1/2, 2/1, 1/2; y 2) *ARAARAAARAAAA*..., o sea, 1, 1/1, 2/1, 3/1, 4... En cada caso se le pide primero al sujeto que describa verbalmente "cómo fueron dispuestas las fichas"; después se le pide que continúe la serie, insistiendo en la consigna de "continuar", y haciendo que el sujeto explique la manera como fue aplicada la consigna. Se pregunta también si hay otras maneras de continuar, y cuáles son.

Después se dispone en series similares un material de forma geométrica (pero todo esto será para la primera ley, antes de proceder del mismo modo a propósito de

la segunda). Para algunos sujetos se emplearon simplemente *L* vueltas al derecho o al revés (⅃), de donde la primera ley: *L⅃LL⅃⅃L⅃LL...* y la segunda, L⅃L⅃⅃L⅃⅃⅃L... En otros casos se utilizaron figuras de un trazo (—), de dos trazos (v), de tres (un triángulo), de cuatro (un cuadrado), seguidos de un pentágono y un hexágono. En cada oportunidad se hace que se describa de nuevo la serie, se pide que se continúe explicando el porqué de la sucesión adoptada, etcétera.

Una vez hecho esto, se pregunta (dejando sobre la mesa la serie geométrica) si "hay algo parecido" entre los dos juegos. El niño puede negarlo o describirlo verbalmente o aun (hay que dejárselo hacer) puede construir una correspondencia término a término entre la serie de las fichas que él entonces reconstruye, y la de las formas espaciales.

Se quitan a continuación las series precedentes y se pide al sujeto que "haga lo mismo" con plaquitas amarillas *P* y fichas verdes *V*, es decir, que generalice la ley aplicándola a un nuevo contenido. Hecho esto se promueve igualmente una generalización, pero en términos de "cifras".

Se comprueba así que la ley aditiva (segunda ley) no se presenta en una forma figurativa simple, tal como se la hubiera obtenido poniendo las fichas en columnas paralelas de 1, 2, 3,... elementos o en hileras horizontales superpuestas o separadas solamente por espacios vacíos: en estos casos la ley que se debe hallar se habría conformado demasiado a la "escalera" propia de las pruebas habituales de seriación. Incluyendo los conjuntos de fichas azules *A* (1, 2, 3, etc.) en una serie lineal donde están separadas por fichas rojas *R*, se exige, por el contrario, una abstracción un poco más profunda, aunque en apariencia totalmente elemental, y se comprobarán en ella dificultades inesperadas (salvo que correspondan al nivel de lo que F. Orsini ha llamado las "alternancias asimétricas" en sus investigaciones acerca de las "regularidades naturales").

§ 1 | EL ESTADIO I. — Este estadio comprende dos niveles, IA y IB, que recuerdan a lo que se halla en los problemas de seriaciones de longitud, primeramente con simples parejas o tripletes (pequeño, grande, etc.) no coordinadas entre sí, después con aciertos, pero a través de tanteos empíricos. En la presente situación el nivel IA es, en efecto, el de los sujetos que sólo logran alternancias simples *AR, AR, AR...*, lo que puede compararse con las parejas en los casos de las seriaciones comunes:

JUL (5;0). Fichas. Primera ley: "¿Qué he puesto allá? — *Bolas azules y rojas.* — ¿Cómo están dispuestas? — *Todos derechos* (= línea horizontal), *hay azules que están derechos y, hay rojos que están derechos.* — Entonces continúa la línea. — (Pone dos azules.) *Porque hay dos* (vuelve a poner dos azules, después muestra dos rojos del modelo). — ¿Cómo son? — *Dos rojos* (los pone). — ¿Y ahora? — *Dos azules.* — ¿Es lo mismo que esto? — *Sí, porque está todo derecho y bien puesto.* — ¿Cómo le dirías a un compañero que hay que ponerlo? — *Los rojos así y los azules así* (pasa a la alternancia simple). — ¿Es similar a lo que hice? — *Sí.* — ¿Qué es lo que había? — *Los rojos y un azul, etc.*" Se los hace comparar mejor: "*Un rojo y después un rojo* (llega a 2). — ¿Y es lo mismo que esto (modelo)? — *Sí, porque están derechos igual.*" Se da entonces un modelo de alternancia simple, que inmediatamente es copiado y prolongado; después se intenta trasponerlos con los *L*, o sea, L⅃, L⅃, L⅃, etc., pero se equivoca de lugares.

GAV (6;0) pone las fichas un poco al azar, como si no pudiera seguir las sucesiones en el modelo. Se le pide que primero mire bien para copiarlo después: ella lo traduce en una alternancia simple. Por el contrario, cuando poco después se le muestra

un orden alternado de este modo, continúa bien *ARAR*, etc., después bruscamente pasa a *2A2R*, etc.: "¿Deseas que sea completamente similar? — *Sí.* — ¿Similar a qué? — (Muestra la alternancia simple.) *A allá.* — ¿Entonces? (no se toma el trabajo de corregir)."

Veamos, por el contrario, algunos ejemplos del nivel IB:

MAS (6;0). Primera ley: "¿Cómo lo he ordenado? — *Todo derecho.* — Pero, ¿cómo? — *Primero uno rojo, después uno azul, después uno rojo* y *uno rojo más, después dos azules, etc.* (descripción correcta). — Entonces continúa la línea. — (Pone *AR/RA/AA/RR/AR/RA/AR/RA/AR/RA/RAA*.) — ¿Cómo continuaste? — *Puse todo derecho... Intenté hacer como usted.* — ¿Te salió bien? — *Creo que no, no sé, no puse todo derecho* (muestra una parte de su serie, no muy horizontal). — ¿Por qué comenzaste con un azul? (De hecho esta vez se ha comenzado con un rojo.) — *Porque allá hay un azul* (el último de la serie), *y allá hay dos rojos, después uno azul, uno rojo, dos azules.*" Se presentan los L bajo la forma *L⅃/LL⅃⅃/L⅃/LL*: "¿Cómo los he dispuesto? — *A veces mirándose y a veces no.* — ¿Puedes continuar? — (Hace L⅃/LL/⅃⅃ /LL/, etc.) — *Uno mirándose, uno no, uno mirándose.* — ¿Qué has mirado? — *Lo que usted hizo.* — ¿Copiaste lo que yo había hecho? — *Sí.*" Se le pregunta después si no "ve nada similar entre los dos juegos. — *No, las fichas son redondas y esto (L) es cuadrado.* — ¿Pero te acuerdas de cómo estaban puestas las fichas? — *Sí* (intenta ponerlas: *AA/RA/RR/AR/AA/RR/AA/RR*). — ¿No hay un pequeño parecido? — *No, no verdaderamente no sé*". Generalización con las plaquitas amarillas *P* y con las fichas verdes *V*" ¿Puedes hacer lo mismo con esto? — (Construye *VV/PV/PP/VV/P/VV/PP/V*.) — Explícame. *Dos verdes que se miran, una amarilla que mira a la verde, dos amarillas que no se miran, dos verdes que se miran, una amarilla que queda sola, dos verdes que se miran, dos amarillas que no se miran y una verde que no mira a nadie.* — ¿Es similar a lo que hiciste antes? — *Sí, lo copié de usted.* — Pero esta vez no hice nada. — *Pero yo miré cómo puso las fichas rojas y azules* (primer modelo, quitado antes de los *L*) *entonces le copié con fichas amarillas y verdes.* — ¿Es lo mismo? — *Sí... no* (no se decide y, sobre todo, no puede formular las analogías). Segunda ley (*RA/RAA/RAAA/R...*): repite el mismo tipo de serie que con la primera ley, más tres rojas; después en el momento corrige por tres azules, pero no sabe continuar. Con los *L* olvida los 3L y repite la primera ley. Con las plaquitas *P* y las fichas verdes *V*, construye una serie de parejas como antes, pero con *3V* en medio de la serie.

RYA (6;5) Primera ley: "*Para comenzar, hay una azul y después una roja, después dos rojas en el medio, después dos azules y al final una roja que está antes de la anteúltima azul* (todo esto es exacto pero falta el orden general). — Mira bien. — (Indica en orden ficha por ficha.) — Ahora vas a continuar. — (*AR/RA/RA/RA*) *¡Qué hice!* (Corrige: R/AA/RR/AA/RA/R.) — ¿Podrías continuar de otro modo? — *Sí*: *AR/AR/RA/AR/RA*." Con las figuras geométricas (— — *vv* — — *v*): "*Usted puso dos rayas, dos v y dos rayas y una v* (correcto). — Entonces continúa. — (— *vv* — *v* — — *v*) *¡Ahí está!*." En la comparación de las dos series, hay un progreso respecto de Mar: "¿No hay nada similar? — *¡Ah! sí, sí, es como si las rayas fueran las fichas rojas y los v las azules.*" Pero intenta en vano construir esa correspondencia y termina con alternancias dobles: *AA/RR/AA/RR/*, etc. La generalización con las plaquitas *P* y las fichas verdes *V* da como resultado una mezcla de alternancias simples y dobles. Segunda ley (completa hasta *4B*); la descripción verbal es correcta, pero la continuación resulta: cuatro rojas, después RRR/AA/RRRR. En la serie geométrica (cantidad de lados de cada figura, o sea 1 2 1 3 1 4..., etc.) fracasa totalmente: 3, 6, 4, 4. La invención final se reduce a una mezcla de alternancias simples y dobles.

MIL (5;2) a pesar de su edad parece adelantada respecto de los sujetos precedentes porque acierta a realizar la copia exacta del modelo I con las fichas y las *L*, pero se debe a que procede por correspondencias 1 a 1: *"Aquí está el primero, aquí el segundo, aquí el tercero, etc."*. Cuando se le pide la comparación entre las dos series, llega además a un sentimiento de correspondencia: *"Hay dos (L) que no se miran y había dos fichas de diferentes colores, etc."*. Pero fracasa al querer construir sin errores esta correspondencia de modo efectivo. Luego: "¿Ves alguna semejanza entre los dos juegos? — *No, no veo nada.* — ¿De verdad nada? — *No, absolutamente nada.*" La generalización da como resultado una mezcla de alternancias simples y dobles.

Estas reacciones del estadio I son instructivas en cuanto a las dos formas de abstracción. Desde el nivel IA se está en presencia de un esquema de regularidad ya adquirido por abstracción reflexionante: el de la alternancia simple, por el que Jul y Gav reemplazan el modelo que se les ha presentado. Al respecto, conviene recordar las "regularidades naturales" que F. Orsini observó al pedir a niños de 3 a 8 años que eligieran sucesivamente pelotas rojas o blancas de un grupo y que las fueran ubicando en los 24 casilleros de una caja alargada, provista de una tapa con corredera que oculta los casilleros ya ocupados. Ahora bien, en esta situación donde la acción sensomotriz precede cada vez más a cualquier representación se observa un 58% de regularidades desde los 3-4 años y un 85% a los 5-7 años: son primero simples uniformidades (poner cada vez una blanca o una roja); después, alternancias simples y a continuación dobles (seguidas, pero más tarde, por alternancias asimétricas y aditivas del tipo de nuestra segunda ley). Parece, entonces, claro que esas regularidades, que no son tomadas de modelos exteriores, constituyen un producto de las asimilaciones de reconocimiento y generalizadoras del sujeto (de donde proceden precozmente las reacciones circulares, etc.), que implican ya una parte de abstracción reflexionante. Pero el principal valor de los hechos del estadio I que hemos registrado es, por el contrario, la dificultad de la abstracción empírica o pseudo empírica que le permitiría al niño tomar nota correctamente de las características del modelo y ajustarse a ellas. Ahora bien, los sujetos del nivel IA solo perciben dos aspectos: que es "todo derecho", es decir dispuesto en una hilera horizontal, y que se observan allí parejas del mismo color ("dos amarillos", etc.), pero sin que el orden de sucesión pueda ser reproducido en la acción ni tampoco descripto verbalmente. En el nivel IB, esta descripción por el contrario, es correcta, pero el sujeto no llega a ajustarse a ella ni aun en su intento de copia ni, *a fortiori*, en la continuación: las alternancias simples o dobles se siguen imponiendo, pero los datos proporcionados por la abstracción empírica no son integrados por falta de un marco asimilador que conserve el orden general (salvo cuando se hace una copia de 1 a 1, como Mil).

Es interesante notar que este orden general está en vías de construcción, como lo testimonian las analogías sentidas, pero sin que explícitamente se tome conciencia de ellas, entre los modelos presentados con la misma estructura y contenidos diferentes: Mar no ve "nada similar" entre las fichas y las *L*, pero cuando ordena las plaquitas *P* y las fichas verdes *V*, mantiene los elementos (parejas, etc.) de la serie inicial (fichas *R* y *A*) y el vocabulario de la segunda (las *L* que "se miran") y Mil hace también la asimilación entre "dos *L* que no se miran" y "dos fichas de diferentes colores" (cf. también

Rya para los trazos — y los *V* comparados con los *R* y los *A*), pero sin llegar por eso a reconstruir el orden general. Respecto de la segunda ley, es obvio que, *a fortiori*, se fracasa al extraerla.

§ 2 | EL ESTADIO II. — Los sujetos de ese nivel (de 7-8 a 9-10 años), que están, por tanto, en la edad de la seriación operatoria en las pruebas de las regletas con diferencias constantes (véase sec. I), logran, naturalmente, copiar y continuar el modelo número 1, y, en lo que concierne a la segunda ley, los sujetos del nivel IIA realizan una buena copia pero sin continuación, mientras que los del nivel IIB ya no tienen dificultades. Veamos algunos ejemplos de los primeros:

NAT (7;0) copia y continúa inmediatamente el modelo núm. 1 con las fichas; después, cuando pasa a las L, comienza por continuar la serie debajo de la precedente para referirse al modelo presentado solo después, para controlar los detalles: "¿Ves algo que se asemeje? — *Usted hizo lo mismo que acá salvo que son redondos y el color es distinto.*" Para la generalización, ya no se acuerda. Después que se le han vuelto a mostrar las fichas se le pregunta si puede traducir la ley mediante dos números: ella propone 1;100; 1;100; 100, etc., pero rechaza 11221122, etc., como falso. Para la segunda ley copia el modelo, pero no puede continuar, y cuando se lo hace, encuentra que *"no van juntos, no, no, hay demasiados azules, habría que quitar los azules"*. Con las *L*, las mismas reacciones y desea *"continuar de otro modo, pero que en algo sea lo mismo"* ¡y hace una alternancia doble!

RAN (7;3) vuelve a copiar y continúa la serie núm. 1 con las fichas y hace lo mismo con las figuras — y *v*, pero no está demasiado convencido de la correspondencia de las leyes: "*Quizás suceda que haya dos, más dos, después uno, después dos... es algo parecido porque hay dos*", pero no logra construir una correspondencia exacta. Por el contrario, traduce correctamente en números la ley de las figuras: 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1 y traza al mismo tiempo una línea similar para las fichas (salvo un lapsus terminal). Segunda ley: (fichas) "¿Cómo está ordenado? — *Con colores, por... por cantidades.*" Copia exactamente el modelo, aunque reemplazando expresamente los azules por los rojos, después lo lee al revés: "*Porque había cuatro, después tres, después dos y después uno*", pero no llega a continuar y vuelve a copiar el modelo cuando se le pide la serie. Sucede lo mismo *a fortiori* con las figuras (de 1 a 4 lados). Con las plaquitas y las fichas verdes sólo llega a 1,1,3,1,1,4, lo que él mismo traduce, por otra parte, a números.

SIB (8;1) para la segunda ley (modelo *ARARRARRR...*) copia correctamente, pero, a pesar de todas las sugerencias, solo llega a continuar así: *RA/RR/AAA/RA/RR/AAA*, es decir, introduciendo una ley de alternancia entre 2*R* y 3*A* con intercalación de *RA*. Se le pide que describa el modelo: "*Usted no los puso de cualquier modo*" (sigue una descripción exacta). Entonces, ¿cuál es la mejor manera de continuar? — *Así* (vuelve a hacer la copia). — Tengo una idea (se pone 4*R* después de un *A* final). — *Bien* (vuelve a copiar con ese añadido sin comprender la serie.) Sin embargo la traducción a números es buena: 1,1,1,2,1,3,1,4 pero sin continuación.

Y dos casos intermedios entre los niveles IIA y IIB:

DUF (8;0) comete un error en la copia, en el caso del modelo 1, *"porque no siempre miraba el comienzo de la serie: a veces miraba al medio"*, pero la continúa

correctamente, lo mismo que con las figuras: "¿Ves algo parecido? — *Sí, los dos*" (muestra las parejas *RR, AA* y los trazos dobles *V* y construye la correspondencia). Después de esto, reproduce el modelo de memoria con las plaquitas y las fichas verdes. Para la segunda ley, copia exactamente, pero solo desea continuar repitiéndose: "¿Podrías continuar poniendo un 5? — *Eso podría ser correcto, pero no es lo mismo que esto* (1,1,2,1,3 y 1,4) *porque no hay la misma cantidad* (de 5*B*). — ¿Y no puedo continuar con 5? — *¡Ah, comprendo!, eso da 1,2,3,4,5,6...* — ¿Qué es lo que queda mejor? — *Con 5,6,7...*" Con las figuras geométricas continúa de entrada con el pentágono y el hexágono: "*Sí, eso da 1 rasgo, después 2,3,4,5,6* (que ella separa por medio de los 1 = —)."

OLI (8;1) para la segunda ley comienza reproduciendo el modelo dos veces: "Mira bien, hay que continuar según la ley. — *¡Ah! Ya lo tengo, 1,2,3,4 es la ley de los números: cada vez se pone uno más* (continúa con 1,5 y 1,6)."

En cuanto a los casos francos del nivel IIB, son, en general, de 9-10 años, pero un caso de 7;3 ya da respuestas correctas a todos los problemas:

MEY (9;5) Segunda ley: continúa hasta 10 y 11, pero ante la cuestión de "explicar la ley a un compañerito", responde: — *Yo no sé. ¡Ah! sí, le explicaría que, digamos, que se trata de autos, van cada vez más rápido y acá* (los *B* que pasan de 1 a 2, 3, etc.) *está el humo del escape: se lo ve cada vez más* (grande)": tiende, pues, a incorporar a su representación los *R* que separan los 1, 2, 3... *A*.

ROC (10;6) Segunda ley: continúa con 5 y 6 y dice: "*siempre hay un R que separa un número* (del siguiente): *da 1, 2, 3...*" Para las figuras geométricas: generalización inmediata con el pentágono y el hexágono: *Es como con las fichas: poniendo otra raya, después 5, 1, 6, rayas.*" Etcétera.

GAV (11;4), solución inmediata para las fichas: "*Siempre se debe unir un A entre dos R.*" En la relación espacial: "*Como la otra, la ley es la misma*", pero incorporada en una serie de objetos ("pseudo-empíricos") esta ley le da una impresión distinta de la relación puramente aritmética: "*Se podría hacer una especie de adición.*"

§ 3 | CONCLUSIONES. — El primer problema por discutir es el de la dificultad de alcanzar el orden general de las series Núm. 1 durante el primer estadio y su tardía aparición solo en los comienzos del subestadio IIA. Sin embargo, los sujetos del nivel IA están ya en posesión de esquemas de alternancia simple (*AR, AR,* etc.) y también de alternancia doble (AA, RR, AA, etc.), estos esquemas que son producto de las abstracciones reflexionantes extraídas de los coordinadores de identificación y de repetición. (*) Pero el modelo propuesto núm. 1 es más "complejo" en tanto mezcla los dos tipos de alternancia según un orden general, 1/2/2/1,1/2/... y es este orden de conjunto el que plantea problemas al sujeto, porque aún no se lo ha obtenido, como tampoco se lo había obtenido en el nivel IB. Una solución fácil consistiría entonces en sostener que ese orden resulta simplemente de una acumulación de abstracciones empíricas, cada una de las cuales proporciona la comprobación de cierta vecindad: 2*R* vecino de 2*A*, pero siendo

(*) Véase para este tema el volumen XXIII de los "Etudes" acerca de *La psychologie et l'epistémologie de la fonction.*

estos vecinos también de *1R*; de ahí el orden *1R2A2R*, etc., consistiendo el orden general solo en una suma de lecturas parciales progresivamente vinculadas. Por cierto que el orden en general (*A, B, C,* etc.) se construye por medio de una coordinación de vecindades (*B* vecino de *A* y de *C,* pero *C* separado de *A*, etc.), pero el problema es establecer cómo se constituye esta coordinación: ¿por una suma de abstracciones empíricas o por una abstracción reflexionante, y a partir de qué?

Ahora bien, como se recordó en la introducción de esta parte II, el esquema del orden no se adquiere por la simple inspección de series ordenadas, pues, para comprobar la existencia y determinar la naturaleza de un orden, es necesario, primero, que las propias actividades del sujeto que interviene en esta lectura sean ordenadas. Los sujetos del nivel IB llegan ya a hacer una descripción verbal correcta del modelo núm. 1 (el sujeto Mas lo hace inmediatamente, Rya al principio con intervenciones) y llegan, pues, contrariamente a los del nivel IA, a ordenar su propia actividad léxica u óculoverbal, pero no sus acciones óculomotrices cuando se trata de reconstruir el modelo al que, sin embargo, siguen teniendo ante sus ojos. Sucede que, contrariamente a las leyes de pura alternancia (simple o doble), a las que llegan Mas y Rya, no basta para alcanzar el orden de la serie considerar un segmento cualquiera de ella (porque tarde o temprano todos se repiten): hay que ubicar toda comprobación en un movimiento de conjunto que conduce del comienzo al final de la hilera. Cuando Duf (intermedio entre IIA y IIB) comete un error de copia, dice muy correctamente "porque no siempre miraba el comienzo de la serie: a veces miraba el medio". Además, este orden de recorrido debe poder ser invertido, pero sistemáticamente (como Ran en el nivel IIA), mientras que la causa de los errores de los sujetos IB estriba, evidentemente, en que oscilan entre un sentido de recorrido y el otro sin lograr una constancia en la orientación de las coordinaciones.

En una palabra, el orden general de la serie alcanzado en el nivel IIA solo puede ser el producto de una abstracción reflexionante, porque la suma de las abstracciones empíricas localmente correctas del nivel IB no basta para engendrarlo, y porque aún es necesario ordenar esas abstracciones. El origen es entonces el conjunto de las coordinaciones entre acciones que caracterizan los comienzos del nivel operatorio IIA, con la constitución de las seriaciones reversibles de tamaño, de las correspondencias seriales, de los aspectos ordinales propios de las operaciones infralógicas antes de la medida, etcétera.

Pero esto nos conduce entonces al segundo problema, más sorprendente, que plantean los hechos consignados en 2): Si la elaboración del orden general propia de los modelos 1 y 2 está ligada a la de las seriaciones aditivas accesibles desde los comienzos del nivel IIA, ¿por qué el modelo 2, que da lugar a una copia exacta, no puede ser prolongado antes del nivel IIB, conservando la misma ley aditiva (1, 1;1, 2;1, 3;1, 4; etc.)? ¿Por qué la sorpresa de Duf y Oli, de 8 años ("¡Ah! ya lo tengo: es la ley de los números: uno más por vez!")? ¿Por qué esos comentarios curiosos de Mey, de 9 años (comparación con la velocidad de los autos, y con la dimensión del humo del escape, en general invisibles...) o de Gav: "Se podría hacer una

especie de adición", como si 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3, etc., no fuera el prototipo de toda adición numérica? Se sabe, de acuerdo con numerosas investigaciones, que la continuación de las series cuya ley se trata de extraer, está lejos de resultar fácil, pero aquí, siendo la ley sólo la adición + 1, hay pues diferencia constante entre los elementos de la serie así como en la seriación aditiva de las regletas (sec. I). Solamente que, en este último caso, esa adición + 1 es percibida figurativamente bajo el aspecto de una "buena forma", que es la *Gestalt* de una "escalera" regular, mientras que en la presente situación la colección de los azules (1*A*, 2*A*, 3*A*, etc.) se modifica de una etapa a otra. Es sin duda esta exigencia de transformación, encarnada en objetos discretos y materiales, pero ordenados y no simplemente reunidos en colecciones, lo que da a May y a Gay esa impresión de alargamiento o de "especie de adición". Pero, sea cual fuere la causa de este retraso desde los niveles IIA a IIB, su interés, desde el punto de vista de la abstracción reflexionante, que estriba en que esta ya no solo debe referirse a la actividad ordenadora global, permitiendo la lectura del orden general de una serie como resultante, o permitiendo construirla cuando los elementos no están dados (pruebas ordinarias de seriaciones o de correspondencias seriales), sino también a las operaciones en sí mismas como constitutivas del detalle de las transformaciones pedidas. Además es evidente que este último nivel de abstracción es más difícil que los otros en razón de la presentación elegida: si la serie dada como modelo incluyera solo columnas de fichas de alturas crecientes(ₒ $\substack{o\\o}$ $\substack{o\\o\\o}$ ...) o alineamientos simplemente separados por espacios vacíos (o oo ooo...) la operación constitutiva estaría ya extraída figurativamente y el descubrimiento de la ley sería mucho más inmediato. En cambio, basta que este espacio vacío sea ocupado cada vez por una ficha roja, mientras que la progresión aritmética 1,2,3... está representada por fichas azules, para que el sujeto no perciba sin una abstracción suplementaria la operación formadora en su iteración indefinida, y es en eso en lo que esta prueba, en apariencia artificial, es instructiva.

En síntesis, estamos, pues, en presencia de tres niveles jerárquicos de abstracción reflexionante, cada uno de los cuales enriquece al precedente apoyándose en él para extraer de allí aquello en lo cual puede extenderlo: el nivel de las alternancias extraído de los coordinadores de identificación y de repetición propios de la asimilación), el del orden total de la serie (extraído de la coordinación de los segmentos de serie, ya se trate de alternancias mezcladas o de adiciones, como en la copia del modelo 2 pero sin continuación), y el de las operaciones constitutivas (extracción de la ley de adición que permanece implícita en el segundo nivel). Se agrega a ello que en el segundo de estos niveles el sujeto se vuelve capaz, por el grado de abstracción entonces alcanzado, de efectuar generalizaciones que consisten en morfismos por aplicación a nuevos contenidos, de donde proviene una consolidación de la forma constituida, así como una toma de conciencia, más o menos profunda, de las analogías entre las diferentes pruebas. Estas analogías solo son expresadas, en el subestadio IIA, por medio de las correspondencias construidas por el sujeto, mientras que en el último estadio (nivel IIB) se agrega a ello la formulación de las leyes utilizadas incluida la de las adiciones repetidas.

II / LA ABSTRACCIÓN EN LA LIMITACIÓN DE LAS ACCIONES AJENAS

EN COLABORACIÓN CON J. J. DUCRET

Los análisis precedentes se refieren a series que el niño sabe bien que fueron construidas por el experimentador; pero cuando copia, describe o prolonga esas series, no imita las acciones de su constructor: si, en sentido amplio, al menos se puede hablar de imitación en este respecto, lo que imita es exclusivamente el resultado de esas acciones ajenas, pero no a estas en tanto movimientos sucesivamente percibidos. Por otra parte, el capítulo siguiente se referirá al orden de las acciones del sujeto mismo y si J. M. Baldwin ha hablado con razón de una posible imitación de sus propias conductas (en los niveles sensomotores elementales), no se trata de nuevo de una imitación de las acciones ajenas. Nos pareció interesante hacer un breve sondeo de las formas de abstracción que pueden intervenir en tales situaciones, retomando los problemas, de la sección II, de series que se deben reproducir y continuar, pero poniendo constantemente el acento en los actos del experimentador y no en lo que él ha hecho (o sea, en las series como resultantes).

Para lograr que se centre en las acciones como tales se le dice al niño: "Vas a mirar siempre lo que yo hago, cómo lo hago, cómo tomo las fichas, y después tú harás lo mismo." Se toma entonces una ficha y se la coloca pidiendo al sujeto que haga lo mismo; después se ponen dos a la vez pidiéndole lo mismo, etcétera. Se puede igualmente abrir y cerrar la caja haciendo que se imiten esos gestos. Por otra parte, durante la experiencia, se repite la consigna preguntando además: "¿Lo hice así (una por vez) o así (dos a la vez)?" y "Si se hace así o así, ¿hay alguna diferencia?", lo que permite ver si el niño solo juzga a través de los resultados o de las acciones como tales. Además, se quita siempre la serie construida en la etapa anterior.

Las fichas utilizadas son rojas, *R*, o negras, *N*. Se comienza por series simples (*) *N/N/N/...* o *NN/NN/NN...*

Se continúa con series 1 a 1, ó 2 a 2, etc., pero tomando las fichas al azar detrás de una pantalla, hallándose las fichas ocultas tanto para el experimentador como para el niño, que debería imitar las acciones de tomar como aleatorias. Se termina con series mezcladas *N/RN/R...* o *NN/RR/NN...* Para juzgar el nivel del sujeto se le pide además que prolongue las series, como en la sección II, y no únicamente que las copie.

§ 4 | EL ESTADIO I. — El hecho sorprendente en los sujetos de 5 a 6;6 ó 7 años es el relativo fracaso en la imitación de las acciones del esperimentador; todo el esfuerzo está dirigido a la copia exacta de la serie construida, esto es, al resultado de esas acciones:

(*) Las barras verticales / separan a las fichas tomadas a la vez, a un mismo tiempo: de a una, de a dos, etcétera.

YOL (5;4) para *RRR/RRR/RR* hace *RRR/RR/R/R/R*: "¿Por qué tomaste tres allá? — ... ¿Yo hice *R/R/R*...? — *Sí* (pero el resultado es 8R)." O también: "Si pongo *R/R* o */RR/*, es lo mismo? — *Sí.* — ¿Hice lo mismo? — *Sí.* — ¿Cómo lo sabes? — *Porque hay 2R.*" Detrás de la pantalla, para R/R/R/N/R/R Yol copia exactamente la serie, desechando las fichas cuyo color no se ajusta al modelo.

FRE (5;6) copia bien *N/N/N*, pero para *NN/NN/NN* hace *N/N/N/N/N*: "¿Hiciste lo mismo que yo? — *No, falta 1* (agrega la sexta) *no, 2* (agrega una séptima faltando la correspondencia visual.) — ¿Hiciste como yo? — *Sí, porque usted tiene 1,2,3,4,5,6, y yo... ¡Ah! aquella* (la séptima) *está de más.*" Se hace *NNN/NNN/NNN*: Fré hace *NN/N/N/N/N/N/N/N*: "¿Qué es lo que has mirado? — *6N, ¡es todo!* — Intentaré hacer como tú (se pone 3/3/3). ¿Es como lo tuyo? — *Sí* — ¿Es igual a lo que tú tomaste? — *Sí, es así.*" Para *NN/RR/NN/RR*, Fré imita en *NNRRNN/R/R*: "Mira (se toman ocho fichas a la vez). ¿Es así como tomaste las fichas? — *Sí.*" Se hace *3N/3R/3N* y esta vez Fré imita con exactitud: "Intentaré hacer como tú (se hace N/N/N/R/R, etc.). ¿Así hiciste? — *Sí.*"

CLA (5;5) fichas detrás de la pantalla: *R/N/R/R/N/N/*: copia los colores desechando las fichas que no convienen. La misma reacción para las parejas *RR/RN/*, etc, salvo el hecho de que continúa tomando de a una: "¿Tomas las fichas como yo? — *Sí.* — ¿Yo las tomé sin saber lo que tomaba y las puse allá? — *Sí.* — ¿Tú también? — *Sí.* — ¿En qué te basaste para hacer lo mismo? — *En la línea.*"

Es inútil multiplicar los ejemplos: todos son similares en el sentido de que, a pesar de que las consignas se repitan sin cesar (cosa que aquí hemos abreviado), el niño no se ocupa de las acciones mismas del experimentador y se centra exclusivamente en la serie ya construida. La reacción es, por lo demás, parecida (véase Fré) cuando se le pregunta al sujeto acerca de sus propias acciones: lo importante es lo que ha hecho y no cómo se lo ha hecho en la sucesión de movimientos efectuados.

§ 5 | EL ESTADIO II. — En el nivel IIA, por el contrario, los sujetos llegan, en general, a una imitación correcta, en las situaciones comunes, pero todavía no lo logran en lo que se refiere a tomar de modo aleatorio de una colección de reserva oculta por una pantalla:

PHI (7;6) imita el acto de tomar de a una, y después de a dos, (*RR/RRR*...): "Y si se continúa así (4R a la vez), ¿también vale? — *No, usted tomó cuatro, y antes de a dos.* — (Para *3R*: imitación exacta.) ¿Qué miraste? — *Antes se tomaba de a dos y ahora de a tres.*" Para la serie *RN/NN/NR/NR/RR/NR* hace una copia cuya segunda mitad es correcta, pero que comienza por *R/NNN/N*: "Se ha tomado lo mismo? — *No.* — ¿Por qué? — *Porque a veces he puesto de a dos cuando no era necesario.* — ¿Cómo lo hice yo? — *Así: R/NNN/N.* — ¿Y tú? — *Así: R/NN/NN.* — ¿Y qué era lo que debías hacer? — Así: *R/NNN/.*" Dicho de otro modo, Phi confunde lo que ha hecho él y lo que ha hecho el experimentador, pero con el certero sentimiento de que algo es diferente. Para las otras series mezcladas de a dos o de a tres, hay imitaciones correctas y motivadas. Por el contrario, para las tomas aleatorias, permanece en la copia de la serie acabada sin imitar las tomas al azar: para R/N/N... incurre en R/R y dice: "*No, eso no vale porque he tomado un R y no un N*", etcétera.

En el nivel IIB (9-10 años) todas las imitaciones son exactas, incluso en los casos de series aleatorias:

IRE (9;4). Para *R/N/N/R...* tomando detrás de la pantalla, llega a *N/R/R...* "*No puse los mismos colores del mismo modo.*" Lo mismo de a dos: toma también de a dos: "¿Es lo mismo? — *Sí, porque se toman de a dos, pero no son los mismos colores... porque no puedo saber si usted toma 2N,* etcétera."

CRI (9;6), las mismas reacciones. Para una serie de ocho con tomas aleatorias de a dos imita bien y llega, naturalmente, a colores y parejas muy diferentes, pero dice: "*Puse como usted.* — ¿Qué es lo que miraste? — *Tomé de a dos.*"

§ 6 | CONCLUSIONES. — Este pequeño sondeo es instructivo porque sus resultados no podían ser predichos con seguridad: era, en efecto, muy posible que mirando actuar al experimentador, el sujeto hiciera una lectura correcta de los rasgos observables como si se tratara de objetos materiales y de la serie terminal misma. Ahora bien: nada de eso sucede y conviene investigar por qué.

Pero aclaremos primero que no tuvimos en cuenta, en lo que precede, las reacciones a los problemas de continuación de series, por ser estas observaciones análogas a las de la sección I: se encuentra en particular el retraso para la prolongación de las estructuras iterativas (1,2,3...) en relación con las alternancias, porque en ese caso hay transformación de los subconjuntos por los que la serie está constituida, y no solamente repetición. Esto se vincula con el problema del por qué de las dificultades en la imitación de las acciones, comparadas con la facilidad de la copia de la serie que resulta de ellas. Vemos dos causas posibles, y además solidarias.

La primera es de carácter general: las características de una transformación son siempre más difíciles de observar y, por lo tanto, de abstraer, que las de los estados. Ahora bien: las acciones del experimentador son, en tanto constructoras de la serie, transformaciones y no estados.

Pero hay algo más. La toma de conciencia de la acción propia es un caso particular de este fenómeno: el sujeto toma conciencia del resultado de sus actos antes de alcanzar el mecanismo y el desarrollo exacto, pues estos implican la reconstitución de un proceso y aquel una simple lectura estática. Ahora bien: parece probable que en las experiencias que preceden, el niño del estadio I asimila las acciones del experimentador a lo que él mismo haría en su lugar aplique así a esas acciones la ley de toma de conciencia como si se tratara de las suyas propias, es decir, centrándose en los resultados y no en el "cómo" de su realización. Ésta no es una hipótesis en el aire: Fré, interrogado acerca de sus propias acciones no las reconstituye mejor que las del experimentador, y sobre todo Phi, que tiene sin embargo 7 años y 1/2, ¡y le atribuye a aquel el procedimiento que él mismo ha seguido y cree que ha efectuado por su cuenta lo que en realidad ha sido una acción exterior que debía imitar (pero en la que él ha fracasado)!

En conclusión, se ve así que la abstracción que se refiere a la imitación de las acciones ajenas está lejos de constituir un proceso simple, incluso cuando esas acciones conciernen simplemente al orden constitutivo de las series. En lugar de referirse a aspectos materiales de esas acciones, como si

se tratara de interacciones entre movimientos del sujeto activo y resistencias de los objetos físicos, y en lugar de proceder directamente por abstracciones reflexionantes como es en parte el caso del nivel IIA, la fase inicial es la de una abstracción pseudo-empírica que se basa en las propiedades de las series resultantes, pero en tanto construidas por las acciones que se trataría de imitar.

CAPÍTULO X

El orden de las acciones prácticas

I / EL ORDEN DIRECTO

EN COLABORACIÓN CON S. DAYAN Y E. DECKER

Conviene, a propósito de la abstracción del orden, agregar al análisis de las series numéricas o espaciales, un breve examen de las relaciones seriales inherentes al desarrollo de las acciones en las situaciones de inteligencia práctica, pero centrando el análisis en la descripción de esas acciones y en la comparación de acciones análogas en situaciones diferentes. Se trataría entonces de elegir conductas muy simples, que pueden llevarse a cabo correctamente a cualquier edad, limitándose al problema de la abstracción de su forma ordenada en relación con los contenidos variables, y ello en las descripciones y en las comparaciones.

En lo que sigue, se le presenta al sujeto primero (I) una muñeca, una mesita, un pequeño escritorio, una silla y un taburete de 3-4 cm de altura que la muñeca debe apilar (en el orden que va de lo más amplio a los más estrecho de las superficies útiles) para alcanzar un frasco de confituras que está sobre un "armario" (una caja grande vertical). En una segunda situación (II), la muñeca está frente a un estanque y debe tomar una canasta que se halla del otro lado del agua, enganchando su asa por medio de una caña de pescar: pero a ésta hay que construirla ensartando el uno en el otro cinco segmentos cilíndricos de longitudes y espesores decrecientes, cada uno con una hendidura en uno solo de los extremos. El sujeto describe cada una de esas dos tareas una vez cumplida y se le pregunta después qué hay de común entre ellas. En caso de

negativa, se hacen preguntas del tipo: "¿Se los ha puesto de cualquier modo?", "¿Cómo se los eligió?", etcétera. A algunos sujetos de 6 a 8 años se les pidió además que "hiciesen algo parecido" con plastilina de diferentes colores, cajitas de fósforos del mismo tamaño pero de colores diferentes, o de cartones distintos, etcétera.

§ 1 | EL NIVEL IA. — Un primer nivel es el de los niños de alrededor de 4 a 6 1/2 años. Todos llegan a resolver los dos problemas, a veces, hasta de modo inmediato, pero con tanteos previos en el segundo. Las dos características notables del nivel son, por el contrario, que los relatos respectivos de las acciones conservan su orden de sucesión en la medida en que puede ser retenido por la memoria, y con conciencia más o menos difusa de las condiciones objetivas, y que, en cambio, en el momento de la comparación entre las dos situaciones, el sujeto no ve nada en común y sólo extrae ciertas relaciones por influencia de las preguntas:

CAT (4;10). I: *"Primero puse la mesa, después el escritorio, después la silla y después el banco* (taburete). — ¿Se hubiera podido hacer de otro modo? — *No, porque esa* (la silla) *es muy pequeña y ese* (el taburete) *también.* — ¿Se hubiera podido poner la silla en el lugar del banco y el banco en el de la silla? — (Reflexión) *Sí* (prueba) *¡No se puede!* — ¿Por qué? — *Es demasiado pequeño... No, así puede ser.* — ¿Y la mesa sobre el escritorio? — (Prueba) *Sí, eso podría ir*"; después comprueba que la altura total es entonces *"demasiado pequeña"*. II: pone 3 en 5 (= el más largo) y coloca invertidos, 2 en 3 y 1 en 2. — "¿Y aquel (4)? — *Hay que ponerlo* (pero no sabe dónde)." "¿Cómo son esos palos? — *Hay algunos más pequeños y otros más grandes.*" Hace una serie de 5, 4, 3, 1, 2 pero aún sin alinearlos. Cuando se le hace la sugerencia, inserta 5 +4 +3. *"Ya es más largo* (ensaya 2 en 3). *¡Está tapado!*" Después de haber mirado la otra punta, acierta a armar la totalidad y resume: *"Puse aquel (5) después encajé el otro, después el otro, etcétera.*" Comparación de I y II: "¿Qué es lo que hiciste aquí (I)? — *Puse primero la mesa, después el escritorio,* etcétera. — ¿Y allá (II)? — *Puse el más grande, uno más pequeño, otro más pequeño,* etcétera. — ¿Hay algo parecido entre los dos? — *No.* — ¿Nada parecido? — *No.* — ¿Cómo pusiste los palos? — *Encajados.* — ¿Y allá (I)? — *Uno encima del otro.* — ¿Aquí (I) está puesto de cualquier modo? — *No, primero la mesa,* etcétera. ¿Y aquí (II)? — *No, el más grande, después uno más pequeño,* etcétera. — ¿Hay algo similar? — *No.* — ¿Ese (el palo 5) es el más...? — *Grande.* — ¿Y la mesa? — *Grande, es correcto.* — ¿Hay algo parecido? — *Los dos son los más grandes.* — ¿Es todo? — *Sí.* — ¿Y aquí (el taburete) es el más pequeño? — *Sí.* — ¿Hay algo parecido? — *No, allá* (I) *no hay palos, aquí* (II) *Sí.*"

DAV (5;0). I: Tanteos; después: *"Ha subido* (ha puesto) *primero la mesa, después el escritorio, después la silla, después el taburete, eso es todo.* — ¿Se hubiera podido hacer de otro modo? — *No; así* (inversiones) *es demasiado pequeño. Hay que hacer así* (un sòlo orden)," II: tanteos e inserción por parejas 4 + 3, 2 + 1; después: "*¡Ah, ya me di cuenta!* — ¿Cómo lo hiciste? — *Puse los palos allá... no sé cómo lo hice.* — ¿Cómo elegiste? — *Hice un hueco en cada palo, pero no de cada lado.* — ¿Entonces cómo? — *Así, puse la goma de pegar y lo pegué.* — ¿Cómo es aquél (5)? — *Grande.* — ¿4? — *Mediano.* — ¿3? — *Pequeño.* — ¿2? — *Grande.* — ¿1? — *Pequeño.* — ¿Se puede hacer de otro modo? — *Sí* (intenta)... *No sé cómo* (lo rehace de modo correcto). — Entonces cómo hizo la muñeca? — *Ella lo construyó, hizo así* (muestra el orden de los palos)." Comparaciones entre I y II: "¿Hay algo similar? — *Sí, es lo mismo... ella quería tomar el frasco... y después del otro lado del agua había una canasta... ella la tomó.* — ¿Y aparte de esto? — *No, hay una cosa de*

hierro, y aquí hay cosas de madera. — ¿Pero aquí (I) los puso de cualquier modo? — *No.* — ¿Y aquí (II)? — *No.* — ¿Hay algo que se parezca? — *No, allá son de hierro y acá de madera.*"

MIR (5;10) I: relato en orden: tanteos, después halla: "¿Cómo sabes que es 3 (después de 5 + 4) y no 2? — *Porque* (2) *es demasiado pequeño.* — ¿Y 3? — *Es un poco grande.* — ¿Y por qué 5 para comenzar? — *Porque siempre al comienzo va uno grande, después uno mediano, otro más mediano, uno pequeño y uno muy pequeño.*" Comparación I y II: Vuelve a describir I llamando al escritorio "*la mesita*": "¿Hay algo parecido entre lo hecho en (I) y en (II)? — *No, porque no son del mismo tamaño* (los dos grupos de objetos). — ¿Cómo es el Palo (5)? — *Grande.* — ¿Y la mesa? — *Un poco pequeña.* — ¿Y aquí (1)? — *Pequeña.* — ¿Y el taburete? — *Pequeño.* — ¿Se parecen en algo? — *Sí, la mesa es casi del mismo tamaño* (Comparada con 1, cosa que él verifica materialmente). — ¿Y qué es lo que se parece al taburete? — *Nada.*"

BLU (5;8), aunque casi formula la ley a propósito del relato de las situaciones I y II, sin embargo no la extrae en la comparación final. Problema II: "*Tomo* (5) *porque era el más grande, el segundo* (4) *era un poco más flaco, después aquel* (3), etcétera. — ¿Cómo elegirías? — *Porque hay unos más gruesos y otros más delgados*". — Comparación de I y II: para I ella recuerda: "*Aquel* (mesa) *es más grande, ese* (escritorio) *el mediano,* etcétera. — Cuando hacías II, ¿había algo similar? — *No. Aquí se engancha con palos, no hay muebles, y allí* (I), *no hay palos.* — Pero cuando ponías el más grueso acá (II) y allá (I) la mesa, ¿no había nada similar? — *Algo diferente: Acá el palo es más grueso, allá la mesa más grande: es cada vez más grande.* — ¿Entonces es parecido? — *Sí, los muebles y los palos: aquí* (II) *enganché así y allá* (I) *así.* — ¿Entonces son parecidos? — *No, son diferentes.* — Ahí, ¿cómo es la mesa? — *Grande,* — ¿Y allá (en II) el 5? — *Grande.* — ¿No hay nada que se parezca? — *Sí, los dos son grandes.* — ¿Y alguna otra cosa? — *No.*"

Estos hechos, comparados con las reacciones generales del estadio I en el caso de las series del capítulo IX, por triviales que sean en sí mismos, son bastantes instructivos. En lo que respecta a las series, los sujetos notaban con acierto algunas relaciones de proximidad y ciertas sucesiones parciales, pero no llegaban a realizar una copia exacta por no dominar el orden de conjunto (la ley) de la serie. En el presente caso, por el contrario, llevan a cabo exitosamente la prueba práctica puesto que, después de algunos tanteos o ya en el primer intento (Blu para II, Car y Mir para I) descubren el orden adecuado; además está bien descripto en el relato y a veces en parte se lo justifica. Y sin embargo, cuando se trata de comparar las dos situaciones, y, por tanto, de extraer una ley, o más precisamente, de disociar una forma común de contenidos diferentes, estos sujetos se muestran bloqueados aunque se les dicte casi la respuesta a través de preguntas sugerentes. Es verdad que Dav halla una analogía inmediata: el fin de las acciones, que en los dos casos consiste en "tomar" un objeto a pesar de la distancia. Blu incluso va más lejos por un instante al señalar también una semejanza en los medios empleados: "Acá (II) enganché así, y allá (I) así". Pero por lo que corresponde al propio orden general de los tamaños objetivos decrecientes, el niño de ese nivel solo ve diferencias, porque los objetos mismos (y por tanto el contenido opuesto a la forma) no son similares: "Aquí, — dice Blu que es, con todo, el sujeto más avanzado— no hay muebles (II) y allá (I) no hay palos."

Por cierto que la abstracción reflexionada, o toma de conciencia de los resultados de la abstracción reflexionante, está retrasada respecto de esta, pero en el caso en que la ley es tan simple y tan rápidamente dominada en la acción, tales retrasos no podrían ser considerables. Sin embargo, sería erróneo pensar que la acción alcanza directamente esta ley, incluso limitándose a cada conjunto particular I o II: la acción procede por parejas o tripletes, es decir por ajustes sucesivos. Se produce, pues, en estos sujetos un principio de abstracción reflexionante, desde el estadio I, a propósito de la traducción de esas sucesiones prácticas en un relato ordenado, que, con mayor o menor éxito, capta el orden total de las situaciones I o II: en efecto, un relato tal implica más que una serie de recuerdos basados en las abstracciones empíricas (a partir de los resultados objetivos de la acción o de los aspectos materiales de ésta), pues un relato es una reconstrucción que introduce, entre otras cosas, un orden temporal. Lo que, en cambio, falta en este nivel, es una segunda etapa de abstracción reflexionante que consiste en extraer la forma común a dos sucesiones particulares, es decir, en profundizar más la diferenciación de la forma y del contenido e integrar ese sistema en una estructura de operaciones.

§ 2 | EL NIVEL IB. — Se obtendrá, en cambio, tal resultado en el nivel IIA (7 a 9 años como término medio). Pero, cosa curiosa, se encuentra entre los 6 1/2 y los 7 años una cierta cantidad de casos intermedios entre los estadios I y II que formulan todos los argumentos pertinentes en favor de la forma común a las dos leyes, pero que siguen negando la similitud. Se los puede agrupar en un nivel IB:

LAU (6;5). I: relato ordenado. II: comienza por 4,2,1,3,5 (¡logrando que se sostengan!) y los describe según los tamaños; después para que se sostengan mejor hace una fila con 4,3,2,1: "*Ella* (la muñeca) *puso primero el grande, después el mediano, después uno más pequeño y después el más pequeñito.* — ¿Hay algo que se parezca entre (I y II)? — *Sí* (duda). — ¿Cómo? — *Porque eso* (mesa) *está primero, y acá también* (palo 5); *eso* (escritorio) *es el segundo, y acá también* (palo 4)..." Después continúa "*no, no va a andar* (esta correspondencia serial) *allá* (palos) *hay uno más.* — Pero fuera de eso, ¿hay algo que se parezca entre (I y II)? — *¡No, No!* — ¿Qué es lo que hiciste allá (I)? — (Descripción en términos de tamaño y después en términos de altura.) — ¿Esto se parece a aquello (II)? — *No.* — ¿Qué es lo que hiciste allá (II)? — (Indica el orden de tamaño.) — ¿Y allá? (I)? — *El escritorio* (segundo objeto) *no era tan grande como la mesa... después, la silla más mediana y el taburete que era todavía algo más mediano* (= más pequeño). — Entonces, ¿hay algo que se parezca? — *No, porque no hay grande allá* (II)... *sin embargo es grande: el palo* (5) *es grande...*". Etcétera.

FUN (6;8) recuerda que en II había "*uno grueso así* (5), *después otro* (grueso: 4), *el mediano* (3), *otro mediano* (2) *y el más pequeño.* — ¿Y aquí (I)? — *La grande, la mediana, la otra mediana y la pequeña.* — ¿Hay algo similar? — *No, allá el color...* (es distinto) — ¿Sin embargo tú dices que allí hay uno grande, uno mediano, etcétera, y aquí (II) hay también uno grande..., etcétera? — *Es diferente porque allá son de hierro y acá de madera, de madera, de madera. Y en parte está pintado... Y allá* (II) *he enganchado y acá puse uno encima de otro*". Se le hace repetir (cosa que había afirmado a propósito de I y II) que ella no ha "enganchado" ni "ubicado" de

cualquier modo: "*No, porque este* (escritorio de I) *es más pequeño que aquélla* (la mesa), etcétera. — ¿Entonces qué es lo que hay de semejante entre lo que tú hiciste aquí y allá? — *Nada.*"

RIC (6;11) extrae, como los sujetos precedentes, las leyes de los tamaños decrecientes (sin establecer, empero, una correspondencia término a término) y comienza por no ver nada parecido entre I y II. Pero cuando, ante una pregunta, recuerda que no se podía ubicar los objetos de modo diferente de como lo había hecho, admite la semejanza "*porque acá* (I) *pequeño, y allá* (II) *pequeño, y acá se vuelve más grande* (en los dos). Lo que difiere es que en I se tiene "*uno sobre el otro*" y en II "*uno en el otro*": "¿Qué es lo que hay de parecido? — *Allá* (II) *se hace cada vez más grande, y acá* (I) *también.*" Ric alcanza así el nivel IIA.

Los sujetos intermedios, que tienen entre 6 1/2 y 7 años, presentan como rasgo interesante una disociación visible entre la abstracción reflexionante y la abstracción reflexionada. Gracias a la primera, comienzan por extraer los elementos comunes a las leyes I y II: algunos, como Lau y Fun, llegarán a indicar una correspondencia serial entre los elementos de I y los de II, mientras que otros, ante preguntas, se limitan a enunciar de modo idéntico las leyes de tamaños decrecientes propias de las dos series. Pero cuando se trata de concluir que es la misma ley o que "se parece" o que "es similar", o dicho de otro modo, cuando se trata de tomar conciencia de la identidad de las construcciones, ya proporcionadas, no obstante, por el proceso reflexionante, se rehusan a ello, pues este último estadio, propio de la abstracción reflexionada implica un esfuerzo reflexivo de retroacción que conduce a una integración total: vuelven a incurrir entonces en la consideración de los contenidos, por no alcanzar la forma común, como Fun, que opone la madera al metal y los colores de los muebles a la pintura de los palos; o como Lau, que invoca una diferencia (absoluta) de tamaño entre la mesa y el palo núm. 5. Solo Ric termina por darse cuenta del parecido que hay, en contraste con la obstinación o las dudas continuas de los otros, y pasa así al nivel IIA.

§ 3 | EL ESTADIO II. — Dos novedades caracterizan al estadio IIA. La primera es que la abstracción reflexionada capta la identidad de las dos leyes y alcanza, por lo tanto, una disociación de la forma común y de los contenidos variables. La segunda es que, en los problemas de generalización, los sujetos construyen series análogas, mientras que en el estadio I los intentos de este tipo solo conducen a semejanzas de contenido entre los objetos (una caja azul comparada con un taburete azul) o entre las acciones materiales (acción de apilar pero sin el orden serial):

PHI (6;7) recuerda el orden seguido en I y en II: "¿Qué parecido hay? — *Están exactamente los dos* (= exactamente ordenados). — ¿Y cuál es la diferencia? — *No hay ninguna.* — ¿Todo es similar? — *Sí, ella hizo que quedase cada vez más delgado acá y allá.*" Generalización: "Hay algo parecido a I y II. — (Con las cajas.) *Grande, mediano, pequeño.* — ¿Y con estas tazas (del mismo tamaño)? — (Hace tres filas superpuestas de tres, dos y un elementos.) — ¿Y con las tazas (T) y las cajas (C) juntas? — *Es fácil* (cuatro filas superpuestas TCTC, CTC, TC y C)", etcétera.

IGO (6;11): "¿Hay algo parecido entre I y II? — *Sí, acá* (muestra el orden) *y allá* (II: idem). — ¿Hay algo diferente? — *No.* — ¿Allá (I) se ha apilado — *No.* — Entonces, ¿hay algo diferente? — *Allá, ella puso adentro y acá* (I) *no, sino uno grande, uno más pequeño, uno más pequeño, etcétera... es parecido.*" Generalizaciones: hace cinco bolitas de plastilina de tamaños decrecientes; después una escalera de cajas (4 en la base + filas de 3 + 2 + 1): "¿Y si hago así (se hace una pirámide)? — *Es correcto allá* (una de las pendientes sobre la mitad izquierda) *y no acá* (mitad derecha) *¡porque así vuelve a descender!*" números: 1,2,3,4, etcétera.

LID (7;8). Comparación: "*Es casi lo mismo* (después de recordarle la inclusión en II y no en I): *Ese* (palo 5) *es más largo; este* (4) *un poco menos, y este se vuelve cada vez más delgado. Allá* (I) *la mesa es más ancha* (amplia) *que el taburete.*" Generalización: las mismas reacciones.

VER (8;10): "En II y I, ¿hay algo parecido? — *Sí, se los ponía los unos en los otros y allá (I) los unos sobre los otros.* — ¿Es similar? — *Sí... allá* (I) *del más grande al más pequeño y acá* (II) *del más grueso al más delgado.*"

Las reacciones del nivel de 9-10 años (comúnmente IIB) no difieren casi de las precedentes, salvo, a veces, por su rapidez y la precisión de los enunciados, especialmente en las generalizaciones (para una seriación de números: "se puede pensar que es de lo más grueso a lo más delgado", etc.).

En total se distinguen en estos hechos tres etapas de la abstracción reflexionante. La primera consiste en traducir la acción, lograda en general con tanteos o por relaciones sucesivas, en un relato ordenado que describe el resultado. Desde luego que el contenido de este relato resulta de abstracciones empíricas a partir de los objetos y de las acciones materiales. En cuanto al orden, se trata en principio de un "reflejamiento" que proyecta al plano de la representación lo que es abstracto en el orden de las acciones. Pero a este primer aspecto de la abstracción reflexionante se agrega un comienzo de reflexión, en el sentido de que el relato hace de ese orden un todo y, además, comienza a separar de él las condiciones objetivas (posiciones y tamaños). La segunda etapa de esta abstracción está dada de modo casi espectacular por los sujetos intermedios descritos en el § 2 (y se hubieran podido agregar otros más), que indican de modo bastante preciso los caracteres comunes de las dos leyes de serie, —lo cual depende seguramente del proceso "reflexionante"—, pero que se rehusan a creer en una "forma" común, no acertando entonces a coronar estas aproximaciones (aunque con frecuencia se las haga llegar hasta la construcción de correspondencias seriales) con una "abstracción reflexionada" que disocie la forma de los contenidos. Por último, en la tercera etapa (nivel IIA) este progreso se adquiere y se traduce, entre otras cosas, en generalizaciones adecuadas debidas a la invención de esos sujetos.

II / ÓRDENES DIRECTO E INVERSO DE LAS ACCIONES

EN COLABORACIÓN CON M. SPYCHER y C. VOELIN

El objetivo de esta sección es el mismo que el de la precedente, con la diferencia de que las acciones prácticas en juego que sirven para las comparaciones iniciales han sido elegidas y analizadas en la medida en que implican un orden inverso tan necesario como el orden directo: por ejemplo vestir y desvestir una muñeca o construir y deshacer una torre (pues para deshacerla sin derribarla hay que comenzar desde arriba), y el problema es ante todo el de la abstracción y el del orden inverso. Pero para acciones tan fáciles (deseábamos que se las pudiese llevar a cabo en cualquier edad) es obvio que el orden inverso es familiar, sobre todo cuando se trata de vestirse y desvestirse, lo que se impone desgraciadamente todos los días. Convendrá, pues, procurar distinguir la abstracción de lo reversible de la abstracción de lo simplemente invertible, cosa que no resulta fácil en las situaciones sin problema de conservación. Pero tanto a este respecto como en otras cuestiones, los índices útiles serán proporcionados especialmente por el material auxiliar presentado al sujeto para que haga algo similar, mientras que los objetos de los que se compone no implican un orden directo ni uno inverso necesarios.

La técnica consiste en pedir primero que vistan a una muñeca proporcionándole solo cuatro prendas cuyo orden es necesario: Un vestido, el cinturón de un vestido, un tapado y el cinturón del tapado. A continuación el sujeto debe decir qué ha hecho y "cómo" (pero sin sugerir el orden). Se presentan después cuatro cubos de distintos colores y de tamaños crecientes, y de cinco lados, de manera que pueden insertarse uno en otro, pidiendo primero que hagan una torre, después que la deshagan con la descripción verbal de cada una de las acciones. Después hay que desvestir a la muñeca y de nuevo se pide el relato detallado. A propósito de alguna de las cuatro acciones se pregunta si hubieran podido proceder en otro orden.

Hecho esto, se plantea el problema de la comparación: ¿entre "lo que hiciste con la muñeca y lo que hiciste con los cubos (o "cuadrados", etcétera, segun el vocabulario del niño) ¿hay algo que se parezca?" Se insiste para obtener en detalle el por qué de las semejanzas o de los rechazos de analogías, y eventualmente para promover la comparación: "¿No hay verdaderamente nada que sea similar?", etcétera.

En la última parte del interrogatorio se da al niño uno o varios materiales distintos: cartones, planos y cuadrados de cuatro tamaños muy diferentes, muebles de muñeca (alfombra, mesa, silla, plato, taza, vaso), arandelas autoadhesivas de 1 cm de diámetro, que se diferencien solo por los colores (varias de cada color) y cuatro bloques de las mismas dimensiones, pero de peso muy diferente. "Con este (cualquiera de los materiales) quisiera que hagas algo que se parezca a la vez a lo que hiciste con la muñeca y a lo que hiciste con los cubos." Se ve que los cartones y las pesas implican un orden serial, pero ni los muebles ni las arandelas lo constituyen. Y es interesante ver cómo el sujeto, o bien generaliza sus conductas precedentes, o bien busca analogías ya sea en el plano de las acciones o en el de las propiedades de los objetos.

§ 4 | EL NIVEL IA. — Los sujetos del nivel IA formulan ya un relato ordenado de la serie de acciones, pero no extraen una forma común en las comparaciones, ni pueden generalizar con otros objetos:

SCA (5;6) viste a la muñeca: "¿Cómo lo hiciste? — *Le puse el vestido, el cinturón del vestido, el tapado y el cinturón del tapado.*" La torre: "¿Cómo los pusiste? — *Uno sobre otro... El grande, el mediano, el pequeño y el más pequeño de todos.* — ¿Hubieras podido ponerlos de otro modo? — *No.* — Volvamos a ponerlos. — (Los encaja.) — ¿Cómo? — *Los he puesto por tamaño.* — Ahora puedes desvestir a la muñeca (lo hace). — ¿Cómo lo has hecho? — *Primero el cinturón del tapado, después el tapado, después el cinturón del vestido y después el vestido.* — ¿Hubieras podido hacerlo de otro modo? — *No.* — ¿Qué hiciste con los cubos? — *Una torre.* — ¿Y después? — *Los puse uno dentro de otro.* — ¿Y con la muñeca? — *La vestí y después la desvestí.* — ¿Hay algo que se parezca entre lo que hiciste con la muñeca y lo que hiciste con los cubos? — *No.* — ¿Nada en absoluto o se parecen en algo aunque sea un poquito? — *En nada. Con los cuadrados hice una torre,* etcétera. — ¿Y después? — *Desvestí a la muñeca.* — ¿Y aquí? — *Deshice la torre, he vuelto a poner las piezas en su lugar.* — ¿Entonces no hay nada que se parezca? — *No.*" Muebles de la muñeca: cualquier orden. "¿Qué se podría hacer para que se parezca a lo que se ha hecho con los cuadrados? — *Que la niña se divierta con los cuadrados.*" Pesas: las sopesa y dice: "*Tienen números* (desigualdades de pesos)", pero cuando se le pide una acción que se parezca a las precedentes, hace una torre.

MAN (5;7). Las mismas reacciones. Con los cartones hace primero una torre y después los dispersa a todo lo largo: "*Es un jardín, hay que pasear a la muñeca.*"

YVE (6;10) Las mismas reacciones iniciales. Solo ve una semejanza entre la acción de vestir y los cubos: "*El vestido combina con ese cubo: es rojo.*" Los muebles: "*Hago una mesa para la muñeca*"; respecto del cubo "*la mesa es casi cuadrada.*" Con las arandelas, hace un círculo de dieciséis elementos: "*Es un cinturón.*"

PAT (6;3) niega toda semejanza: "*Esta es una muñeca y este es un cuadrado*"; pero presionado por las preguntas acepta esto: "*Después los ordené* (a los cubos). — ¿Y con la muñeca? — *La ordené.* — ¿Entonces hiciste lo mismo? — *No, la muñeca se desviste y esos* (los cubos) *se quitan.*" Arandelas: hace "*una torre Eiffel*".

Se comprueba que las acciones en juego en los dos problemas iniciales están perfectamente coordinadas y se traducen ya en relatos acordes con el orden seguido, lo cual representa un comienzo de abstracción reflexionada. Pero esta es aún muy insuficiente y no basta para extraer la forma común de las acciones (hacer y deshacer, etc.) de tal modo que las comparaciones se limitan estrictamente a los contenidos: no hay nada de común entre una muñeca y una torre, salvo que, según Yve, uno de los cubos es rojo como el vestido de la muñeca. En cuanto a los intentos de hallar una relación con el material nuevo, recuerdan de modo sorprendente las "colecciones de figuras" del primer estadio de las clasificaciones: cualquiera puede vincularse con cualquiera con tal de que haya una relación funcional o espacial (la chica) se divierte con los cubos, dice Sca, Man hace "un jardín" para ella, Yve imita su cinturón con las arandelas, etc.).

§ 5 | EL NIVEL IB. — Aproximadamente a los 6 años, se observan reacciones análogas a las que hemos descripto en el § 2, de la sección I: el

sujeto ve las semejanzas basadas en las acciones y en parte las caracteriza, pero se niega a admitirlas por no poder disociar la forma común del contenido variable:

FRA (5;10): "Lo que hiciste con la muñeca y con los cubos, ¿son cosas similares? — *¡No, un cuadrado y una muñeca no son algo similar!* — Pero lo que has hecho... — *Volví a poner* (los cubos) *y volví a vestir* (a la muñeca), *es casi lo mismo.* — ¿Qué exactamente? — *Desvestí y volví a vestir, después saqué los cubos y después hice una torre, pero eso no tiene nada que ver.* — ¿Por qué? — *Porque no desarmé la muñeca: si le hubiera sacado las piernas habría sido lo mismo. Si se pone todo eso el uno sobre el otro.*" Con los cartones vuelve a hacer una torre, pero "*no se parece* (al juego de la muñeca): *con los cartones hice una torre y los volví a poner; a la muñeca, la desvestí y la vestí* (la volví a vestir). — ¿Eso se parece? — *Casi... No, no se puede hacer una torre con la muñeca.* — ¿No se parece ni siquiera un poco? — *Intento adivinar... ¿verdadero o falso? ¡Es falso!* — ¿Pero lo que hiciste con los tres? — *No tiene nada que ver lo que hice con la muñeca. Con los otros, sí: hice una torre, ¡pero es todo!*".

ALA (6;6) advierte claramente (como es frecuente desde Sca) el orden indispensable de los vestidos, después para la torre: "*Por orden según el tamaño, primero el más grande,* etcétera. — Entre lo que hiciste con la muñeca y lo que hiciste con los cubos, ¿hay algo que se parezca? — *No, una torre no es lo mismo que una muñeca cuando se la viste.* — ¿Y después? — *Los volví a poner* (los cubos). — ¿Y la muñeca? — *La vestí y la desvestí.* — ¿Entonces no hay ninguna cosita que hayas hecho de la misma manera? — *No.* — ¿Completamente? — *No, verdaderamente no.*" — Con las pesas hace una torre.

ANG (6;2): "¿Hay alguna semejanza? — *No.* — Buscando bien, ¿no hay ni siquiera un pequeño parecido? — *Los bloques están cerca de la muñeca...* — ¿Y otra cosa? — *Se ha vestido y deshecho.* — ¿Y los bloques? — *Una torre. Se la ha deshecho también* (!) — Entonces, ¿se parecen un poquito? — *No.*" Con las arandelas, hace "una casa" para que concuerde a la vez con la torre y la muñeca.

Se vuelve a encontrar aquí la misma paradoja observada en los sujetos Lan, etcétera, de la sección I (§ 2): Fra y Ala describen la semejanza bajo la forma de hacer y deshacer, hacer y volver a poner en su lugar, etcétera, pero al mismo tiempo la niegan (¡y Fra con ese argumento ingenioso de que no ha desarmado a la muñeca!). Ang se aproxima aún más al nivel IIA, pero continúa negando la forma común, aunque la describe globalmente. En una palabra, se ve operar en los hechos un proceso de abstracción reflexionante pero que no conduce a una abstracción reflexionada suficiente para formular su resultado.

§ 6 | EL NIVEL IIA. — A los 7-8 años, como término medio, se admite una semejanza entre las dos acciones, en razón de su doble sentido, directo e inverso, y donde esta semejanza está igualmente basada en una correspondencia término a término de los elementos añadidos o quitados en las dos series de acciones. Pero antes de citar casos claros de este nivel, puede resultar interesante mencionar casos intermedios entre los estadios I y II que admiten la semejanza, pero la justifican mal confundiendo las dos orientaciones:

VAL (7;7): "¿Hay algo que se parezca? — *Sí, volví a poner* (vestir) *la muñeca y volví a poner los cubos como antes* (por lo tanto, deshace la torre para volver a poner los bloques)."

NIC (8;1): "*En los dos casos hice lo mismo: desvestí la muñeca y a los bloques los puse unos sobre los otros*", y después: "¿Qué semejanza hay? — *Se desviste a la muñeca y se apilan los bloques.*"

Estos errores, de los que se podrían destacar otros ejemplos, son instructivos y muestran que, por influencia de la reversibilidad naciente al comienzo del estadio de las operaciones concretas, las orientaciones directas e inversas están, de ahora en más, vinculadas en un solo esquema. Cuando se trata de formular verbalmente la reacción entre dos vínculos así esquematizados, pueden existir errores de sentido en esa relación, pero el error mismo muestra que la relación directo-inverso prevalece en cada pareja sobre las relaciones directo-directo o inverso-inverso de una pareja a otra. Más precisamente, la reversibilidad verdadera supone, como lo veremos más adelante, la consideración de todo el camino recorrido ABCD..., entonces invertido en... DCBA, mientras que la reversibilidad es solo un retorno al punto de partida sin inversión intencional término a término de cada una de las etapas intermedias. La consideración naciente del camino recorrido puede entonces conducir a las conductas intermedias de las que acabamos de mencionar ejemplos: volver de D a A para rehacerse el trayecto AD antes de invertirlo sin más en DA. Vimos casos muy claros de este tipo en las operaciones numéricas del capítulo III.

En cuanto a los casos claros del nivel IIA, justifican correctamente la semejanza por la pareja directo-inverso y la precisan buscando correspondencias entre las dos series, la de la acción de vestir y la de la torre. La edad media de este nivel es de 7-8 años, pero se encuentran uno o dos casos precoces de 6;6, e incluso de 5;7:

DAN (5;7 avanzado) acepta la semejanza "*porque para desvestir se puede volver a deshacerlo.* — ¿Volver a deshacer qué? — *La muñeca y los cubos... Sucede lo mismo al vestir y al poner los bloques, porque para desvestir se quita el cinturón, el tapado, el cinturón del vestido y el vestido. Para quitar los bloques, se pone el pequeño, el delgado, el mediano y el grande...* — Entonces, ¿qué es lo parecido? — *Todo lo que se hace con la muñeca y los cubos*". En cuanto a los muebles de la muñeca, los pone en un cierto orden, después los quita en un orden en parte diferente, pero se corrige para que sea exactamente el inverso: "*Ahora es correcto porque había puesto al comienzo...*, etcétera."

CRI (6;6) "*Se quita un bloque y se desviste a la muñeca, las dos cosas se parecen.*" No establece correspondencia al respecto, pero con los cartones hace una serie "*en torre, pero acostados* (de plano sobre la mesa), *entonces se parecen: son* (de arriba hacia abajo) *cada vez más grandes*", después los superpone y recuerda a los bloques encastrados: "*cada vez más pequeños*".

NAD (7;4): "¿Hay algo parecido? — *Sí, se le puso el vestido* (pone al mismo tiempo el primer bloque), *después la bufanda* (pone el segundo bloque), etcétera." Después establece la correspondencia en orden inverso: "¿Qué es lo parecido? — *Es correcto* (= hay correspondencia): *cuando quitaba el vestido, se quitaba el bloque,*

cuando se quitaba la bufanda se quitaba el otro bloque, etcétera; *después se ha vuelto a poner todo, los vestidos para la muñeca luego los bloques."*

DAV (7;7), las mismas reacciones: *Acá se quita la bufanda, allá se quita la caja* (= el cubo), *para el cinturón, la caja amarilla,* etcétera; *después se vuelve a vestir y se vuelve a poner en el lugar."* Con los cartones: seriación y correspondencia con los cubos, después con los vestidos, pero procurando, sin éxito, tener en cuenta los tamaños.

TOP (7;9) ve la analogía en lo que "*se ha hecho y deshecho*", y ello en cierto orden, "*de lo más grande a lo más pequeño*" para construir la torre y "*de lo más pequeño a lo más grande*" para deshacerla: "*Con la muñeca... no se hubiera podido comenzar por el cinturón. En el caso de los bloques, no se podría comenzar por quitar el grande...*" Del mismo modo arregla los muebles y después construye una flor con las arandelas, pero en determinado orden, que él invierte al deshacerla.

DIS (8;0) pone en correspondencia término a término los cubos y los vestidos en los dos sentidos del recorrido: "*En los dos hice lo mismo.*" De igual modo hace una serie con las pesas y, para la correspondencia, "*el menos pesado debe estar al final*". Las arandelas son dispuestas en serie, y después se las pone de nuevo en el lugar invertidas según los colores, y Dis concluye que en todos estos casos es necesario "*poner y sacar en todas partes*".

MIC (8;0): "*Para desvestirla primero saqué el cinturón como si sacara el cubo más chico.*"

La unanimidad de estas respuestas, cuya lista se podría ampliar indefinidamente, es bastante sorprendente si se la compara con la resistencia a advertir analogías propias del nivel IA y, sobre todo, con el reconocimiento implícito de estas similitudes, pero con resistencia a reconocerlas como tales, como sucede en los ejemplos del nivel IB. Lo impresionante en esta pequeña experiencia, es, en efecto, que desde el nivel IA los sujetos advierten claramente, y lo dicen en forma explícita, que en el caso de la torre, como en el de la vestimenta: 1) se hace algo para deshacerlo después; 2) se lo hace en un orden serial (de lo más grande a lo más pequeño, o desde el interior al exterior, etc.), y 3) este orden es impuesto por la necesidad de los hechos. Pero las dos diferencias entre las reacciones del nivel IIA y las precedentes consisten en que: 1) los sujetos de IIA extraen de lo que precede la idea de una forma común de las acciones u operaciones, cosa que en los niveles anteriores no veían, y 2) que aplican por generalización esta forma común a objetos que pueden implicarla o no (orden de los muebles en Dan y Top, de las pesas en Dis, de las arandelas en Top y Dis, etc.).

Hay, pues, problemas diversos. El primero es distinguir esta reversibilidad generalizada del nivel IIA de lo que en los niveles precedentes es solo reversibilidad, aunque las expresiones verbales (deshacer, volver a poner, quitar, ordenar, etc., desde el nivel IA) puedan parecer comparables. En los problemas de conservación la diferencia es clara, porque la reversibilidad conduce a esta gracias a la "conmutabilidad" (lo que se agrega en un punto equivale a lo quitado en otro), mientras que la reversibilidad no implica tales compensaciones sino un simple retorno. En el caso particular, este criterio no actúa, pero interviene otro: la reversibilidad se centra únicamente en el

resultado (los vestidos, los cubos, etc., se vuelven a poner como lo estaban inicialmente), mientras que la reversibilidad supone la identidad de los trayectos recorridos, siendo la dirección lo único diferente: ahora bien, es precisamente lo que se comprueba, no en el caso del vestido y de la torre, donde los trayectos no pueden variar, sino en el de cualquier material: "Ahora es correcto" dice también Dan al descubrir el orden inverso de los recorridos; cf. también Top y Dis.

En segundo lugar, estos hechos ponen en evidencia la alternancia de papeles entre abstracciones reflexionantes y reflexionadas, constituyendo las primeras procesos y las segundas la toma de conciencia de sus resultados. En el nivel IA las acciones de vestir o de hacer una torre y sus inversas no implican un plan detallado sino que su ejecución impone una coordinación de los sucesivos actos: de esta coordinación se extraen entonces por abstracción reflexionante un esquema de orden, así como su reversibilidad posible. El doble relato de lo que se ha hecho y lo que se ha deshecho, que expresa correctamente ese orden ("los puse por tamaños", etc., dice ya Sca, de 5;6, en el nivel IA), constituye entonces una primera etapa de abstracciones reflexionadas, pero que siguen siendo particulares a cada una de las categorías de acciones consideradas, sin disociación de las formas y de los contenidos (estos todavía prevalecen en las comparaciones y en las generalizaciones). Con el nivel IB se asiste a un progreso de la abstracción reflexionante, que se apoya seguramente tanto en las abstracciones reflexionadas como en las propias coordinaciones de acciones: en efecto, el sujeto extrae ciertas analogías entre las categorías de acción, por ejemplo cuando Ang dice de la torre "también la deshicimos" (siendo el término "también" explícitamente comparativo). Pero el hecho notable (ya observado en § 2 de la sección IV) es que el progreso en el proceso "reflexionante" no conduce inmediatamente a un resultado "reflexionado" es decir a la aceptación de esas similitudes, pues esto supone la disociación de la forma y del contenido, es decir, un nivel superior de abstracción. Es, pues, sólo en el nivel IIA donde se llega a esta adquisición.

En una palabra, la abstracción reflexionada resulta siempre de procesos reflexionantes anteriores pero puede servir de punto de apoyo para procesos análogos ulteriores. Pero en el caso del nivel IIA, la situación se complica por el hecho de que la reversibilidad, bien concebida y descripta por los sujetos, no constituye el resultado exclusivo de las conductas particulares descriptas en los niveles precedentes, puesto que allí se trata de una característica muy general, común a todas las transformaciones operatorias de los comienzos del estadio II (operaciones concretas). Es, pues, casi evidente que la abstracción reflexionada de los sujetos citados (de Dan a Mic) está facilitada por ese movimiento de conjunto de las operaciones nacientes.

§ 7 | EL NIVEL IIB y EL ESTADIO III. — En cuanto a los sujetos de los niveles IIB (9-10 años) y III (11-12 años), se caracterizan por una mayor penetración en sus declaraciones, por ejemplo, al diferenciar los tipos de orden y al integrarlos en una forma común del orden en general:

FRA (9;8) indica como analogía de conjunto: *"Hay que construir y deshacer"*, pero lo importante es *"el modo de construcción"* siempre ordenado: con las pesas un

"*orden de pesos, con los cubos lo hice por orden de tamaño y aquí* (las pesas) *de más pesado a más liviano*". "*Con los vestidos no por orden de tamaño, sino... como un orden de clasificación: poner primero, segundo, tercero y cuarto.*" Con las arandelas, lo mismo: "*Convendría poner de la mayor cantidad a la menor* (toma cinco amarillas, cuatro azules, tres negras y dos verdes y "destruye" haciendo un montón en el orden inverso)."

ISA (11;3) distingue el orden necesario (vestidos y cubos): "*No lo puedo hacer de otro modo*" y el orden introducido en un material cualquiera (muebles, etc.), donde se trata entonces de "*poner primero lo que es más esencial: ... de lo más importante a lo menos importante*".

NIS (12;3) busca por todas partes "*el verdadero orden*" o "*el orden correcto*", mientras que FRE (12;5) lo opone a los casos donde "*puede haber un orden, pero no es obligatorio*".

Nos encontramos así en presencia de formas superiores de abstracción reflexionada en las cuales comienza una reflexión acerca de las reflexiones anteriores, origen de la construcción de "operaciones sobre las operaciones" que caracteriza el estadio de las operaciones formales. Pero no es otra cosa que el momento último (en las edades estudiadas aquí) de ese proceso descripto más arriba, según el cual la abstracción reflexionada es a la vez el resultado de abstracciones reflexionantes anteriores y el punto de partida de otras, que son nuevas, pero que se apoyarán en ella.

CAPÍTULO XI

Los cambios de orden o retrocesos necesarios

EN COLABORACIÓN CON A. BLANCHET

En algunas situaciones, un orden de desplazamientos sucesivos implica, en un punto determinado, un retroceso momentáneo que constituye un intermedio entre un rodeo y un retorno parcial. Desde el punto de vista de la abstracción reflexionante, puede ser interesante analizar cómo el sujeto comprende la necesidad de tal subsistema, cómo lo integra en el sistema total y a qué comparaciones llega cuando se le presentan dos situaciones análogas en este aspecto. Una de las situaciones elegidas es la de las plataformas giratorias que se usaban en los ferrocarriles para cambiar la dirección de un tren: si una locomotora *L* arrastra dos vagones, *A* y *B*, y la plataforma giratoria solo tiene dos lugares, es necesario entonces que *L* gire con *A*, lo ubique en una vía del estacionamiento, después vaya a buscar a *B* y encuentre a *A* antes de continuar la marcha (fig. 2). El otro dispositivo consiste en una corredera G-R que hay que hacer deslizar hasta *ZZ'* pero a lo largo de hilos no paralelos (fig. 1). En este caso, cuando la corredera está en *BB'* hay que hacer avanzar su parte derecha *R* hasta *C'* lo que permite que su parte izquierda *G* baje de *B* a *C*: entonces, para continuar, hay que hacer retroceder *R* de *C'* a *B'* dejando *G* en *C* y se puede retomar la marcha, pero se vuelve a encontrar una dificultad en *DC'*. Como se advierte, tales retrocesos obligatorios y parciales que intervienen en la marcha en sentido directo y que se vuelven a hallar, pero en sentido contrario, en el trayecto de regreso, son diferentes de la simple inversión del orden de las acciones, estudiada en la sección precedente, y plantean al sujeto problemas mucho más difíciles.

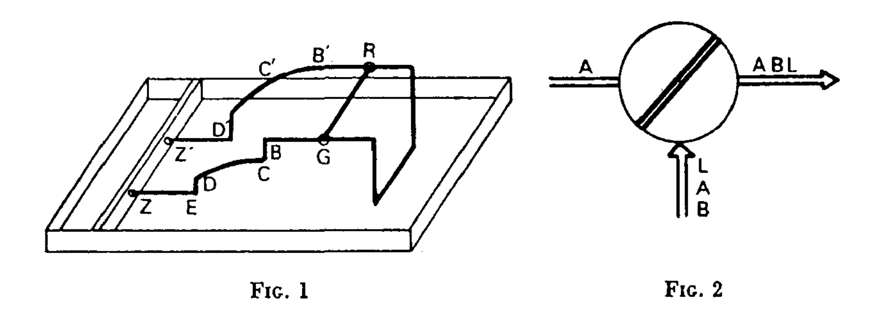


FIG. 1 FIG. 2

El procedimiento seguido consiste en comenzar por el problema de la corredera, pidiéndole que la haga avanzar hasta los límites terminales *ZZ'*. En caso de que el sujeto haya efectuado largos tanteos sin comprender lo que debía hacer ni haya acertado por azar, se lo ayuda mostrándole las sucesivas posiciones de las arandelas en los distintos niveles desde el fin, de *ZZ'* a *CB'* (pasando por *ED'* y *DC'*) y él retoma sus ensayos en sentido directo.

Si acierta por azar, se le pide un segundo y un tercer ensayo para juzgar su comprensión y sus eventuales aprendizajes. Además, una vez que la corredera está en *ZZ'* es importante pedir que realice el trayecto de regreso y hacer que lo compare con el de ida. De modo general, se procura obtener un relato detallado de las acciones cumplidas.

Se pasa después al tren con la consigna de mover los vagones sólo por medio de la locomotora. La plataforma no podrá llevar más que un vagón además de *L*. El niño debe comprender la función de la plataforma giratoria y la necesidad de desenganchar un vagón para estacionarlo y volverlo a buscar después. Se le pide que haga marchar el tren hacia la izquierda y después hacia la derecha aceptando primero el orden *LBA* y después exigiéndole que conserve el orden *LAB*, lo que supone una inversión de las direcciones. Además, es necesario comprender que la locomotora no puede quedar adelante sino que en ciertos momentos debe empujar a *A* ó *B*., so pena de no poder ir a buscar al último vagón. Para esto se le presenta, al final del interrogatorio sobre el tren, un dispositivo sin solución posible, con *L* adelante.

La tercera parte consiste en una comparación de las dos situaciones, la de la corredera y la del tren. Se pregunta si guardan semejanzas y cuáles son, y también qué diferencias hay. Si el sujeto no encuentra ninguna analogía, se le presentan dos situaciones comparables: las que preceden el retroceso, es decir, con la corredera ubicada en *CD'*, y con el tren cuya locomotora está sobre la plataforma, el vagón *A* en la vía de la derecha y el *B* en la de la izquierda. Se pregunta de nuevo si las acciones que van a tener lugar se parecen o no.

§ 1 | EL ESTADIO I. — Los sujetos del estadio I (5-6 años) no llegan por sí mismos a retrocesos y si bien a veces lo logran por azar (por tanteos, intentando forzar) o con ayuda, no extraen de ello un aprendizaje ni integran subsistemas en su proyecto general:

FAR (5;5). *Corredera:* intenta forzar. "*No se puede.*" Pero empujando sin querer ya la arandela *G*, ya la *R*, logra hacer pasar, por azar, la primera bajada *BC*, después tropieza con la segunda: "*Así no va.*" Se le muestra con una lapicera el retorno de *ZZ'* a *CB'*: "¿Eso te da una idea? — *No* (nuevamente intenta forzar). Etcétera." Los mismos tanteos para el retorno de *ZZ'* a *BB'*, sin sacar partido de los logros por azar: "¿Hay que hacer lo mismo o no para ir y para volver? — *Se va hacia atrás* (habla del retorno y no de retrocesos), *pero son los mismos contornos.*" *Plataforma giratoria:* intenta en vano poner *LAB* sobre la plataforma y quita *B*: "*Hay que dejarlo en la estación.*" Pasa con *AL* pero para buscar *B* conduce a *L* por encima de *A*, etcétera, y no retrocede nunca con la locomotora *L*.

CAR (6;3) Corredera: los mismos intentos de forzar con logros parciales no utilizados por falta de comprensión: "Hay un pequeño truco: puedes avanzar y retroceder. — (Hace retroceder ya una de las arandelas, ya las dos) — *No va.* — ¿Qué quisiste hacer? — *Subir aquí* (*B*) *y después descender.*" La sugerencia de los retrocesos es, pues, asimilada a las simples idas y vueltas que se efectúan en todo tanteo. Se sugieren entonces los desplazamientos de *R* y de *G* por separado, y finalmente lo logra, pero ya no lo tiene en cuenta en un segundo ensayo y en el primer bloqueo muestra que *R* cae y dice: "*¡Ah!, eso, el retroceso*", pero hace retroceder toda la corredera, hasta que se le muestra de nuevo el subsistema: "Intenta ahora decirme cómo lo hiciste. — *Se hacen avanzar las dos* (arandelas) *y se las pone allá* (*ZZ'*). — ¿Se avanza siempre (gesto que indica sin retroceso)? — *Sí.* — ¿Crees que se puede avanzar derecho así? — *Sí.*" *Plataformas giratorias:* intenta forzar los tres *LAB* sobre la plataforma y hace descarrilar el tren; depués quita *B* pero por una sugerencia de buscarla rehace la serie *LAB*, intenta de nuevo colocarlos sobre la plataforma y otra vez hace descarrilar el tren. De nuevo quita a *B* y se le pregunta si *L* podría ir a buscarlo sin *A*: "*No, habría que poner una* (plataforma) *más grande.* — No hay. ¿Y si se pone *L* y *B* sobre la plataforma? — *No... Sí* (empuja a *A* con *L* y busca *B*: acierto). — ¿Qué hiciste? — *Allá, L debe girar, esta* (A) *se debe poner aquí* (vía que sirve de punto de partida), *después girar y poner aquel* (*B*)." Pero en el segundo intento se ve que ella no ha aprendido nada, sino que la plataforma es muy pequeña: hace avanzar *LAB* hasta su borde y dice: "*No se puede porque (B) es demasiado.* — ¿Qué hacer? — *Sacar B* (lo empuja hacia la derecha y vuelve con *LA* al punto de partida). — ¿Pero para ir allá? — *¿Los tres*? — Sí. — *No se puede.* — ¿Pero antes se había podido? — *Sí.* — ¿Cómo? — *Se avanzó* (*AL*) *y se giró... ¡Ah sí!* (vuelve al punto de partida.) — Mira (se vuelve a hacer la maniobra). Prueba. — (Hace avanzar *LAB*, empuja *B* hacia la izquierda, hacer avanzar *LA* a la derecha, deja *A*, retoma *B* y forma así *LBA* ¡e intenta hacerlo pasar por la plataforma!) *No se puede porque hay uno de más.* — ¿Pero antes también? — *¡Estaba allá... se le ha quitado uno!*" Hay que notar además que si, en ocasión de las sugerencias de trayectos parciales (como *L* y *B*), se le ocurre a Car empujar el vagón con la locomotora, es sin intención y, en otros casos, ella pone la locomotora adelante sin ver que eso hace imposible la búsqueda del último vagón.

Esta falta de comprensión propia del estadio I con un efecto casi nulo de aprendizaje (y esto hasta en dos sujetos de 7 años) sin duda se debe a esa característica muy general de este nivel que es la primacía sistemática de los aspectos positivos de la acción y la incapacidad de coordinarlos con los aspectos negativos. Como el fin general de las presentes conductas era desplazar los objetos hasta un punto final, el retroceso no podría ser todavía concebido como un medio necesario para lograr el objetivo, tal como lo es la conducta del rodeo accesible en ciertos casos desde los últimos niveles sensomotores: en efecto, un rodeo (por ejemplo bordear un obstáculo eludiendo

un trayecto rectilíneo) es solo una desviación pero todavía orientada indirectamente en la dirección del fin, mientras que los retrocesos parciales de una arandela de la corredera o de la locomotora consisten en rehacer en sentido inverso una parte del camino ya recorrido en el sentido directo y la integración de un subsistema tal de orientación negativa en el programa positivo es, pues, más difícil. Así, las sugerencias de retroceso no son comprendidas por Far y son asimiladas por Car a una simple reiniciación de la acción, del tipo de las oscilaciones del tanteo, marcadas por la reanudación de la acción, pero para lograr mejor el objetivo y sin que el retorno al punto de partida tenga otro sentido que el de permitir un nuevo ensayo positivo (ella hace retroceder toda la corredera o lleva el tren a su posición inicial).

§ 2 |EL NIVEL IIA. — Con los sujetos del nivel IIA (7-8 años), hay un comienzo de integración del subsistema negativo en el programa positivo de conjunto, pero ulteriormente, y después de tanteos. Hay además un comienzo de comprensión de la analogía entre el proceso de la corredera y el del tren, pero en los casos siguientes consideraremos primero a un sujeto de 6;8 años que, como los casos de nivel IB de la misma edad del capítulo X (secc. I y II, en § 2, de ambas secciones), describe correctamente el parecido pero no reconoce la forma común por falta de suficiente abstracción "reflexionada":

PHI (6;8). *Corredera:* tantea, retrocede y logra el objetivo. Segundo ensayo: procura forzar en *BC*, hace avanzar un poco a *R* y fuerza: "¿Es como hiciste antes? — *Sí* (Hace avanzar más a *R*, después lo hace retroceder espontáneamente y acierta). *Hay que volver a subir* (la arandela *R*) *y dejar esta* (*G* en *C*)." *Plataforma giratoria*: ubica a *A* sobre la vía de la derecha y a *B* sobre la vía opuesta y va a buscar a *A*: "*Es necesario hacerla avanzar (a A) y ponerla allá, después hay que ir a buscarla* (a *B*), etcétera. (Descripción correcta.)" Comparación de los dos: "*En los dos hay maderas, allá un tornillo y acá un tornillo.* — ¿Y qué más? — *Nada más.* — En lo que hiciste hay un truco y allá también: ¿es lo mismo? — *No.* — ¿Son completamente diferentes? — *Sí.* — Aquí (plataforma) ¿cuál es el truco? — (Describe las idas y vueltas.) — (Se acuerda de las dos situaciones que precedían al retroceso: *R* trasladado hacia *C'* en el caso de la corredera y los dos vagones opuestos). ¿Sabes lo que debes hacer acá y allá? — *Sí.* — ¿Eso es parecido? — *No, allá* (tren) *puede retroceder y acá no* (corredera). — ¿Qué se hace entonces? — *Volver a subir.* — ¿Y entonces no se puede decir 'volver para atrás'? — *No.* — ¿Y allá (tren)? — (Hay que decir) *¡regresar!* — ¿No se parecen? — *No.*"

Vemos la sorprendente analogía con los casos del nivel IB citados en el capítulo precedente. Consideremos ahora casos claros:

CER (7;1). *Corredera:* intenta forzar; después comprueba que *G* no puede descender de *B* a *C*, mientras que *R* "*puede ir más lejos*". Hace descender a *G*, después hace retroceder todo e intenta hacer volver a subir a *G*: "¿Qué quieres hacer? — *Volver atrás* (prueba y comprende en el trayecto). — ¿Cómo hay que hacer? — *Hay que ir allá* (*BC'* con *R* pero actúa mientras habla y hace descender *G* de *B* a *C*), *después volver a subir aquí* (*R* a *B'*) *y después avanzar.*" Logra el retorno con tanteos: "¿Los trucos son los mismos o no? — *Casi los mismos, pero no completamente: cuando se va hay que hacer así* (retroceso de *R*) *y para volver hay que hacerlo del otro lado.* — ¿Entonces? — *Para volver es lo contrario.*" *Trenes:* después de tanteos pone a *A*

sobre una vía y va a buscar a *B*, con lo cual se pasa al orden *LBA*. Se le pide que conserve el orden *LBA*: llega a eso después de manipular los vagones. Buena descripción y comprensión, después de algunos ensayos, de la solución imposible: "*Porque la locomotora está allá adelante, entonces yo no puedo buscar a B.*" (Recordemos que en el estadio I los sujetos no ven dificultades en que la locomotora esté adelante.) *Comparaciones:* no ve al principio semejanza; después, comparando las dos situaciones antes del retroceso: "*Se parecen un poco: es el mismo truco ahí* (trenes), *debe ir a buscar el vagón* (*A*) *y es necesario ir allá* (retroceso de *R*). — ¿Cómo dirías tú? — *Allá, es necesario volver y acá también.*"

LIL (7;9) comprende rápidamente con la corredera que "*es necesario retroceder* (*R*) *y hacer descender aquella* (*G*) *al principio*". Retorno: "*Es lo mismo.*" *Trenes:* primero tanteos, después logro del objetivo.

XAN (8;1). *Corredera:* larga prueba y después comprensión: "*es necesario hacer retroceder (R) y avanzar el otro* (*G* a *C*). — Prueba. — (Lo logra) — ¿Cómo lo hiciste? — *Pasé a la derecha (R) antes de la izquierda y después retrocedí.*" Retorno: "*Retrocedí acá (R) y pude subir allá* (*G* de *C* a *B*). *Puse primero allá (G) y retrocedí acá (R)*; *es casi lo mismo.*" *Trenes*: "*No se puede*", después separaciones y logro del objetivo. Comparaciones en las situaciones antes del retroceso: "*Se parecen porque aquel (L) debe retornar hacia atrás para tomar (A) y retornar para tomar (B).* — ¿Y la corredera? — *Se debe volver hacia arriba.*"

Se comprueba que, después de tanteos, los sujetos comprenden las dos situaciones. Del mismo modo, después de haber dudado de su analogía, la captan desde el momento en que se les recuerdan las posiciones antes del retroceso.

§ 3 | EL NIVEL IIB. — Este nivel difiere del precedente solo por dos particularidades, pero ambas de interés en relación con la abstracción reflexionante, pues tienden al progreso de la conceptualización. En lo que concierne a las comparaciones, los sujetos ya no esperan a que les sea requerido para ver analogías atemperadas, por lo demás por el hecho de notar las diferencias. Pero, por otra parte, este esfuerzo por alcanzar una visión de conjunto contraría, en ciertos casos, el análisis en detalle, porque en lugar de intentar de entrada los ensayos, el sujeto se fía de anticipaciones deductivas muy simples:

BAC (9;2) halla por sí mismo que es necesario hacer avanzar la arandela *R* hacia *C*', después la hace retroceder, pero no lo suficiente: "¿Qué querías hacer? — *Subir (R) después hacer avanzar la barra (RO), pero así no va.*" Se le pide que marque con una lapicera las posiciones deseadas, cosa que hace correctamente. "Entonces prueba. — *Así no va* (sin embargo, hace avanzar *R*, lo hace retroceder y triunfa). Segundo intento: primero bloqueo, después: "*¡Ah, sí!* (acierto). — ¿Cuál es el truco? — *Hacerlos subir y después los dos vienen solos.*" *Trenes*: aciertos rápidos. *Comparaciones*: "En lo que se ha hecho, ¿hay algo que se parezca? — *Casi, lo hice casi con los mismos detalles.* — ¿Los trucos son los mismos? — *No completamente... porque allá* (tren) *no descendí.*"

MIG (9;8) anticipa igualmente las dificultades de la corredera antes de las pruebas: "*Es necesario ponerlo derecho* (= volverlo a poner perpendicular, pues *R* ya ha avanzado un poco) *porque el palo está derecho y aquí (CC') es demasiado delgado*

(el palo es demasiado corto), *entonces no llega.*" De todos modos prueba y tantea: "*Es necesario hacer así* (con *R*: *CC'* y *CD'*) *y volver* (acierto). *Tren*: logro del objetivo y comprensión de la imposibilidad del último dispositivo. *Comparación*: "*Es el mismo juego, la plataforma giratoria es como la corredera porque es una mezcla* (de direcciones). *Hay que poner los vagones de un lado y del otro.* — ¿Los dos trucos se parecen? — *El truco consiste aquí* (corredera) *en volver a subir y allí en ubicar los vagones, en tomar el A* (aparte) *y volver a buscar el B.* — ¿Hay algún punto en común? — *Hay que girar alrededor de esto* (punto *C* para la corredera) *y aquí hacer girar la plataforma.* — (Se recuerdan las situaciones antes del retroceso.) — *Los dos son pequeños circuitos.*"

LIR (10;6). Comparación: "¿Los dos trucos son iguales? — *Casi iguales. Acá se debe separar y allá se debe separar también. Acá* (corredera) *hay que volver a subir y descender y allá se debe girar* (plataforma). — ¿Por qué son similares? — *Allá girar a la derecha y a la izquierda y acá subir y bajar* (por lo tanto, inversiones en los dos casos)."

Veamos ahora, para comparar, un caso del estadio III:

RIB (12;0) intenta forzar la corredera, luego, después de haber empujado *R*: "*Debe haber un medio* (vuelve hacia atrás y acierta). — ¿Cómo lo hiciste? — *Fui hasta allá* (*CD'* con *R*) *después volví hacia atrás con uno solo.*" Segundo ensayo: acierto inmediato al igual que el retorno. *Tren*: aciertos inmediatos en los dos sentidos. *Comparaciones:* "*Hay seguramente algo que se parece: el sistema de los dos vagones y el de las dos arandelas* (de la corredera). — ¿Los dos trucos se parecen? — *Cuando se hace marchar la arandela de la derecha (R) hasta allá (C') es un poco como la plataforma giratoria.* — ¿Hay algún parecido? — *Los dos juegos se parecen en un punto más, pero no sé cuál... ¡Ah!, en los dos juegos hay que volver atrás a un punto.*"

Por consiguiente, sólo en el estadio III este problema del retroceso es dominado por completo, aunque en el nivel IIA se halle la solución por medio en ensayos sucesivos.

§ 4 | CONCLUSIONES. — El interés del problema del retroceso abordado en estas páginas reside en que, al ser en todos los niveles impuesto por los hechos, podría parecer que depende únicamente de abstracciones empíricas. Ahora bien: el caso no es el mismo en otras situaciones ya estudiadas: así, en una catapulta hay que hacer retroceder el proyectil a lo largo de la palanca para lanzarlo más lejos, o en los balanceos de la bala del capítulo XIII, hay que hacer retroceder el punto de tiro para que llegue más arriba: ahora bien, aunque en estas situaciones los hechos imponen igualmente constricciones (pues las relaciones espaciales dependen a la vez de los objetos y de la geometría del sujeto), la necesidad del retroceso solo se comprende en función de una deducción basada en la forma circular de las curvas en juego, como aquí en el estadio III. Por consiguiente, nos podemos preguntar si no interviene igualmente en el presente desarrollo un factor de deducción y de abstracción reflexionante, necesario no solo para la interpretación, por parte del sujeto, de los datos fácticos, sino también para su propia lectura. La hipótesis es tanto más verosímil cuanto que, como ya dijimos a propósito del estadio I, existe en los niveles iniciales una primacía sistemática

de los elementos positivos de la acción y del pensamiento, que retarda la comprensión de los factores negativos o inversiones de sentido, de las cuales participa precisamente el retroceso.

Lo que realmente sorprende en las reacciones del estadio I, desde el punto de vista de la abstracción, no es que los sujetos no imaginen un retroceso (se ha visto que incluso en el estadio III la idea al respecto viene solo después de tanteos): ocurre que, guiados y clarificados por el experimentador, no tienen en cuenta lo que ven e interpretan el retroceso como una simple reiniciación del ensayo. Dicho de otro modo, el retroceso está bien comprobado (abstracción empírica), pero no integrado en carácter de medio necesario, esto es, como subsistema que forma parte de un sistema total que no podría carecer de él. En un caso así, parece claro que la abstracción empírica no conduce a ningún aprendizaje sin un marco asimilador de abstracción reflexionante.

Al llegarse al nivel IIA, ese marco es proporcionado por la reversibilidad general que caracteriza la formación de las operaciones concretas: se sigue de ello que en el curso de los tanteos, los distintos desplazamientos de las arandelas *R* y *G* de la corredera son interpretadas como utilizables a título de medios que responden a la falta de paralelismo de los trayectos *BC* y *B'C'*.

Dicho de otro modo, el sujeto ya no se limita, como en el estadio I, a comprobar los aciertos o los fracasos de las acciones, pero sin poder extraer de ello nada en cuanto a su consecusión o a su repetición: pone en correspondencia los trayectos de *R* y *G* con las trayectorias asimétricas *BCD* y *B'C'D'* y el retroceso de *R* se torna a partir de ese hecho, no solamente utilizable, sino necesario. Hay, pues, una coordinación de acciones, que contrasta con la sucesión de acciones aisladas propias del estadio I y que hacen del retroceso un subsistema integrable en el programa general. Esta coordinación particular, producto de una abstracción reflexionante a partir de las coordinaciones generales del comienzo de las operaciones concretas, es después ella misma la fuente de nuevas abstracciones que se traducen primero en un relato correcto y ordenado de las acciones afectadas. Pero en el caso de los sujetos intermedios como Phi (en el § 2), este progreso no es aún suficiente para engendrar una "abstracción reflexionada" que extraiga la forma común de los problemas de la corredera y de la plataforma giratoria. Con los casos claros del nivel IIA (de Cer a Xan), se alcanza ese estadio con formas aún poco precisas, pero suficientes para atestiguar la toma de conciencia reflexiva de los mecanismos de inversión.

Con el nivel IIB, esta reflexión integradora se afirma más, pero se da, como vimos, por medio de anticipaciones muy tempranas, mientras que en el estadio III se alcanza finalmente el equilibrio entre las abstracciones empíricas y reflexionantes.

CONCLUSIONES DE LA SEGUNDA PARTE

Los cuatro capítulos que acabamos de dedicar a las relaciones de orden han confirmado que la aprehensión de estas incluye siempre la intervención de la abstracción reflexionante. Pero los hechos que en esos capítulos se describen nos han proporcionado además dos tipos de enseñanzas que conviene resumir como conclusión.

La primera es que incluso en el dominio de las seriaciones la abstracción "pseudoempírica" no se reduce a un conjunto de comprobaciones sino que exige la utilización de un marco asimilador, lo mismo que la abstracción empírica sola, con la excepción de que en la situación pseudoempírica ese marco, para asegurar una lectura adecuada de los datos (y aquí hablamos de esa lectura y no de las reconstrucciones o de las continuaciones, en las cuales ello ocurre *a fortiori*), debe reunir las operaciones que han permitido la construcción de la serie y cuyas propiedades de orden con ello han sido introducidas en los objetos. Por cierto que la lectura de los caracteres observables de una serie exponencial (cap. VIII) puede parecer difícil, aunque se trate sólo —lo repetimos— de comprobaciones perceptivas, pero lo que pudimos notar en los niños de cuatro a seis años tendría su equivalente en las series simplemente aditivas (escaleras de diferencias constantes) realizadas por sujetos más jóvenes (como lo sugieren nuestras investigaciones anteriores acerca de su memoria). (*)

La segunda enseñanza que debemos recordar es que, en el caso de las secuencias ordenadas más simples (cap. X) que corresponden a problemas resueltos en todas las edades después de la formación del lenguaje, la comparación de las dos pruebas experimentadas con éxito —o sea la abstracción "reflexionada" que separa su estructura común— presenta proporcionalmente los mismos retrasos en relación con la abstracción reflexionante que en el caso de problemas claramente más complejos como la inversión de las operaciones aritméticas del capítulo III y las formas elementales del grupo de Klein, como el capítulo VII.

(*) Piaget e Inhelder, *Mémoire et intelligence*, cap. I (P.U.F.).

TERCERA PARTE

LA ABSTRACCIÓN DE LAS RELACIONES ESPACIALES

Tras haber estudiado la abstracción reflexionante en el caso de las estructuras algebraicas y después en el de las estructuras del orden, queda por examinar el de las estructuras espaciales. Pero el problema es entonces mucho más complejo, pues existe un espacio de los objetos así como una geometría del sujeto, lo que supone, en los niveles precientíficos (y ello sigue siendo parcialmente verdadero aun hasta la ciencia moderna), una constante colaboración de las dos formas de abstracción, empírica y reflexionante. Desde el punto de vista de la epistemología de las ciencias volveremos a tratar el problema en las conclusiones de esta parte III. En cuanto a los hechos psicogenéticos, vamos a estudiar sucesivamente un problema de conservación, la construcción de una semiesfera, la utilización de diagonales, ciertos movimientos cíclicos y diversas cuestiones de traslación y de rotación. Esperamos así hallarnos en condiciones de precisar las relaciones particulares que mantienen entre sí los dos tipos de abstracción en un terreno *sui generis* como el del espacio.

CAPÍTULO XII

Relaciones entre superficies y perímetros de los rectángulos

EN COLABORACIÓN CON J. P. BRONCKART y E. RAPPE DU CHER

Las abstracción "reflexionante" es un proceso que permite construir estructuras nuevas por reorganización de elementos extraídos de estructuras anteriores, y, como tal, puede funcionar tanto de modo insconsciente como bajo la dirección de intenciones deliberadas: en particular el sujeto ignora durante largo tiempo de qué fuentes ha tomado los mecanismos constitutivos de su nueva construcción, y un matemático puede, sin que ello obstaculice su trabajo, no saber nada de las raíces psicogenéticas de las estructuras elementales que utiliza (por ejemplo, la de grupo). Llamamos, por el contrario, abstracción "reflexionada" a la toma de conciencia de los resultados de una abstracción reflexionante, y es interesante estudiar sus condiciones. Para hacerlo, el mejor método es el utilizado a propósito de las estructuras de orden (caps. VIII-XI): hacer que el sujeto resuelva dos problemas análogos, que se dominan en cualquier edad o cuyas soluciones se analicen de antemano en su evolución, y pedirle a los sujetos de todos los niveles qué semejanzas o qué diferencias hay en las dos situaciones. Se trata, pues, de centrar lo esencial de la investigación en la comparación de las estructuras más que en su formación, contrariamente a lo realizado en los capítulos I a VI. En lo que sigue se estudiarán las comparaciones y la abstracción reflexionada que interviene en ocasión de los problemas espaciales de superficies y de perímetros sin perjuicio de volver a esto, a propósito de las diagonales (cap. XIV), etcétera.

E. Lunzer y Vinh-Bang ya han estudiado hace algunos años (*) las relaciones entre superficie y perímetro en rectángulos cuya forma se modifica

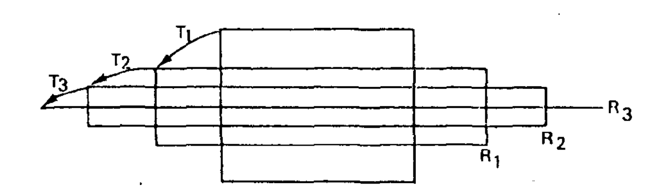
(*) Véase el volumen XIX de los "Etudes": *Conservations spatiales* (P.U.F.).

dejando invariable uno de esos dos aspectos, y, entre otras cosas, han puesto en evidencia el hecho notable de que con el progreso de las nociones de conservación los sujetos son llevados a considerar a las dos como si se conservasen simultáneamente en virtud de un lazo aparentemente necesario.

Este capítulo volverá sólo en forma muy breve sobre esos hechos para poner el acento en nuestro problema, que es el de las comparaciones que los sujetos establecen entre las dos situaciones, en las que se conservan la superficie o el perímetro.

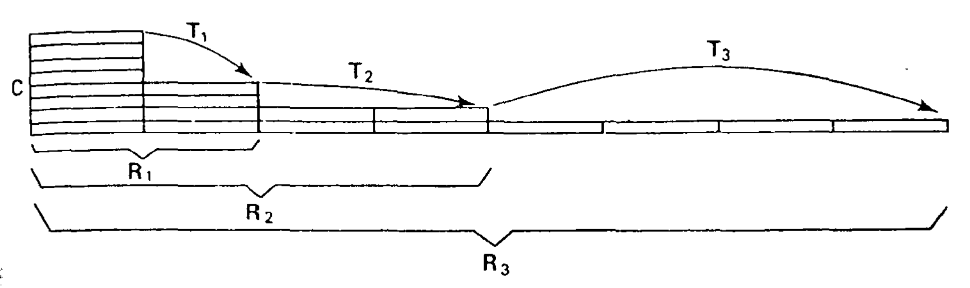
La técnica en su principio general consiste en transformar un cuadrado en rectángulos cada vez más alargados. Pero se utilizan a ese efecto dos dispositivos diferentes, *A* y *B*, cuya descripción es la siguiente:

Material A. En el centro de una plancha, cuatro clavos constituyen las cuatro esquinas de un cuadrado de 25 cm de lado. De uno y otro costado del cuadrado se disponen ocho clavos que constituyen las esquinas de dos rectángulos, que tienen respectivamente 35 y 45 cm de longitud y 15 y 5 cm de ancho. Por último, dos clavos constituyen los dos extremos de una recta de 50 cm. Las diferentes figuras tienen un perímetro de 100 cm; este último se materializa mediante una cuerda "cerrada". Con la ayuda de este material, se pueden, pues, efectuar, a partir del cuadrado *C*, dos rectángulos y una línea recta que llamaremos respectivamente *R1*, *R2* y *R3*, y todo ello por medio de tres transformaciones, *T1*, *T2*, *T3*.



Material B. Está constituido por ocho tiras de cartón de color verde. Cada una de estas tiras tiene 24 cm de largo y 3 cm de ancho. Las ocho tiras, unidas entre sí por su largo, foman un cuadrado de 24 cm de lado. Las cuatro tiras superiores, dispuestas al lado de las cuatro tiras inferiores, forman un rectángulo de 48 cm de largo y 12 de ancho (*R1*). Por una operación del mismo tipo, se puede también constituir un rectángulo de 96 cm de largo y 6 de ancho (*R2*), y, por fin, un último rectángulo de 192 cm de largo y 3 de ancho (*R3*). Como en *A*, las transformaciones que servirán para constituir *R1*, *R2* y *R3* se llamarán *T1*, *T2* y *T3*.

Hay que notar que tanto en *B* como en *A*, es el niño mismo el que construye los rectángulos *R1* a *R3* y ejecuta así las transformaciones *T1* a *T3*, con una simple ayuda eventual del experimentador al comienzo.



Intentamos abordar el proceso de abstracción extraído de la acción del sujeto en tres fases sucesivas.

Fase I. Después de cada transformación, le preguntamos al sujeto cuál es el efecto cuantitativo de ésta última sobre la superficie y el perímetro. (¿La superficie se hizo más grande, más pequeña o quedó igual?).

Comparamos las respuestas obtenidas en *A* y en *B* por los mismos sujetos. Un grupo de sujetos, según las edades, efectúa las manipulaciones primero sobre *A*, y después sobre *B*, y otro primero sobre *B* y después sobre *A*.

Fase II. Después que el niño ha efectuado todas las transformaciones en *A*, se le pide que resuma lo que acaba de hacer y en particular que precise la orientación de la evolución de las superficies y de los perímetros. Se le pide lo mismo después de las manipulaciones centradas en *B*.

Fase III. Después de las manipulaciones en *A* y en *B* se le pide un resumen general: el experimentador intenta especialmente ver a partir de qué momento el niño es capaz de extraer las características comunes a los dos tipos de manipulación.

Se propone entonces una comparación entre las dos manipulaciones. ¿Se trata de dos "juegos" parecidos o diferentes, y por qué razones?

Por último, se pregunta si existen características comunes en las variaciones cuantitativas de las superficies y de los perímetros en *A* y en *B*.

§ 1 | LAS CONSERVACIONES. — En el orden *AB* un primer nivel IA es el de las correspondencias globables entre superficie y perímetro, aumentando o disminuyendo los dos a la vez: pero esta reacción raramente es pura, y, especialmente en el caso de *R3* en *A*, se encuentran frecuentemente disminuciones de superficie con aumento del perímetro como si hubiera compensación pero, al menos al comienzo, hay simplemente una sumisión a las apariencias sin búsqueda de coherencia:

MIC (6;9). En *A*, para *R1*: "¿La cantidad de madera adentro es más grande, más pequeña o igual que lo que había antes? — *Es más grande, porque antes era un cuadrado.* — ¿Agregué algo? — *Es la misma cuerda.* — ¿Y si se midiera la cuerda? — *Sería más larga.* — ¿Puedes hacer aún un rectángulo? — (Hace *R2*) — ¿La cantidad interior? — *Es más pequeña.* — ¿Y la cuerda? — *Es más pequeña.* — ¿Hay menos cuerda? — *Sí.* — ¿Puedes hacer el último rectángulo? — (Hace *R3*) — ¿Y el

tamaño de la madera adentro? — *Más pequeña.* — ¿Hay más aún? — *No.* — ¿Y la longitud de toda la cuerda? — *Es más grande, más larga.* — ¿Hay más que antes? — *No... Sí.* — ¿Agregué algo? — *Hay menos.* — ¿O lo mismo? — *Menos.*" Dispositivo *B*. Hace *R1*: "¿Adentro hay más, menos o la misma cantidad de papel? — *Hay menos.* — ¿Y el borde? — *Es más largo, los costados son más largos.*" Hace *R2*: "¿El tamaño del papel? — *Más pequeño porque es más largo.* — ¿Hay menos papel, o más, o lo mismo? — *Menos, es más delgado.* — ¿Y el borde? — *Es largo.* — ¿Ha cambiado? — *Sí, es más largo.*"

En un nivel IB la falta de correspondencia predomina hasta cierto punto sobre las correspondencias globales, y en algunos casos se puede ver una especie de compensación, porque el sujeto duda entre los aumentos y las disminuciones, lo que da lugar a soluciones mixtas que, por otra parte, se parecen más a compromisos que a compensaciones explícitas:

YVO (7;0). *A* en *R1*: la superficie (cantidad interior): "*No es lo mismo, es más pequeña.* — ¿Y el límite? — *Cambió de forma, el tamaño es un poco más grande.* — Sí, allá (lado mayor); pero ¿es más pequeña acá (lado menor)? — *Sí, se hace una media* (mitad). — ¿Se ha agregado algo? — *Sí, se ha agregado.* — ¿Tú me viste agregar algo? — *No.* — ¿Es la misma cuerda o no? — *La misma.* — ¿Y su tamaño? — *Es más grande.*" Las mismas reacciones para *R2* y sobre todo para *R3*.

En el nivel IIA (7-8 años) comienzan a prevalecer las respuestas correctas:

FRA (7;6) *A* en *R1*: "¿La cantidad de madera adentro? — *Lo mismo... no, no creo.* — ¿Y la cuerda? — *Tiene el mismo tamaño que antes.* — ¿Y así (*R2*: superficie)? — *Más pequeña.* — ¿Y la cuerda? — *Es la misma porque es el tamaño de antes.* — ¿Y así (*R3*)? — *Ya no hay superficie.* — ¿Y la cuerda? — *La misma*". Rectángulo *B* en *R1*: la superficie es "*más pequeña aquí* (ancho) *pero la longitud es más grande: es lo mismo que antes.* — ¿Por qué? — *Siempre se puso la misma cantidad de cartones*". Pero el perímetro aumenta "*porque hay más bordes*".

En el orden *AB* estas respuestas correctas se observan en la mitad de los sujetos de 7-8 años y en los dos tercios de 8 y 9 años. Pero desde los 8 años, un tercio de los sujetos, y cada vez más en el nivel IIB (9-11 años), dan las respuestas paradójicas ya observadas por Lunzer y Vinh-Bang en la conservación general de la superficie y del perímetro, salvo para *R3* en *A* (aunque no siempre):

ANC (9;10). *A R1*: "¿Y el perímetro? — *Un poco más grande, ¡ah! no, la misma cuerda.* — ¿Y la superficie ha cambiado? — *Allá* (largo) *es más grande y acá* (altura) *es más pequeño, en total es lo mismo.*" Para *R3*: "¿El perímetro? — *Lo mismo.* — ¿Y la superficie? — *Lo mismo. ¡Ah!, no es exactamente lo mismo porque en el cuadrado estaba el cuadrado, mientras que acá hay un rasgo muy pequeño.*"

Sólo hacia los 11-12 años se encuentran respuestas correctas. En cuanto al orden *BA*, se obtienen los mismos resultados, pero con casi dos modificaciones que son interesantes desde el punto de vista de la abstracción. La primera es que en *A* (esta vez después de *B*), las reacciones de falta de correspondencia o de compromiso (disminución de la superficie y aumento del perímetro, o a la inversa) desaparecen en provecho de correspondencias globales

y, sobre todo, de respuestas correctas. La razón de esto es sin duda doble. Por un lado, el perímetro que en *B* es solo el borde de la superficie, está constituido en *A* por la cuerda desplazada sobre los clavos, y este hecho favorece naturalmente la conservación. Por otra parte, la constancia de la superficie es facilitada en *B* por la conservación de la cantidad de pequeños elementos que simplemente son desplazados, lo cual no se encuentra en *A*.

La segunda diferencia es que si comenzando por *B* se favorece la conservación de la superficie por la razón que acabamos de ver, por el contrario, si se comienza por *A* hay en *B* tendencia a admitir la disminución. Es difícil ver en ello algo más que una influencia del efecto espectacular de la última transformación en *A*, cuando el rectángulo *R3* ya no implica superficie y se reduce a una doble cuerda. Seguramente en estas edades la disminución de la superficie ya no ejerce ningún efecto sobre el perímetro, pero se trata aquí de una reacción diferente, de superficie a superficie, debida a la comprobación imprevista de un área que se reduce finalmente a cero sin apariencia anterior de repetición suficiente para sorprender hasta ese punto al sujeto.

§ 2 | LAS ABSTRACCIONES EN JUEGO EN LAS CONSERVACIONES. — Antes de pasar al examen de los resúmenes y las comparaciones pedidas a los sujetos, debemos aún intentar caracterizar los tipos de abstracción que intervienen en lo que precede. Ahora bien, la cuestión no es fácil, porque toda representación espacial puede depender en parte de la geometría del objeto y en parte de la del sujeto en proporciones difíciles de determinar.

Sin embargo, parece claro que las reacciones iniciales de correspondencia global resultan ante todo de abstracciones extraídas de aspectos figurativos de los objetos, esto es, de abstracciones empíricas (o pseudoempíricas, lo que viene a ser lo mismo para el sujeto): son los cambios perceptivos de las figuras los que hacen creer en los aumentos o disminuciones simultáneos de las superficies y de los perímetros, según las percepciones se centren en los alargamientos, —especialmente cuando los rectángulos cada vez más largos sobrepasan la frontera del cuadrado—, o en los adelgazamientos. Las soluciones de compromiso (falta de correspondencias) parecen deberse a los mismos factores en la medida en que no interviene una idea de compensación (como en sus formas tardías).

Por el contrario, el descubrimiento en *A* de la invariabilidad del perímetro, por el hecho de que se trata de "la misma cuerda" supone mucho más: sabemos bien, en efecto, que no en todos los niveles se considera que un mismo objeto, desplazado por el sujeto, conserva su longitud, sino que, por el contrario, hacia los 8-9 años se comprueba la indiferenciación entre el desplazamiento y el alargamiento: parece, pues, muy natural para los sujetos jóvenes que una "misma cuerda" pueda cambiar de longitud, y se plantea el problema de los orígenes de su conservación. No basta tampoco sostener respecto de esto que los desplazamientos de la cuerda se deben a acciones del niño, y a ello se debe el carácter reflexionante de las abstracciones extraídas de allí: el sujeto obra, en efecto, del mismo modo que en los niveles anteriores, sin que eso implique las abstracciones esperadas. Es necesario admitir, pues, que la invariancia de longitud de la "misma cuerda" es asegurada por las mismas coordinaciones inferenciales que las numerosas conservaciones al comienzo del nivel IIA, basadas en las identidades, reversibilidades y

compensaciones habituales. Sucede lo mismo con la conservación de la superficie en *B*, en los desplazamientos de los ocho elementos que constituyen el cuadrado inicial. De modo general, la abstracción reflexionante que opera en esas reacciones consiste en extraer de las coordinaciones en juego una ley de "conmutabilidad" (o conmutatividad en sentido amplio), según la cual lo que se agrega en un punto (aquí la longitud) corresponde cuantitativamente a lo quitado en otro (en este caso el ancho).

Un problema más delicado es explicar cómo llegan a comprender los sujetos del nivel IIA que en *A* la superficie no se conserva (lo que es evidente para *R3* pero no lo es de ningún modo para *R2* ni, sobre todo, para *R1*) y que en *B* el perímetro aumenta de *C* a *R3*. Respecto de este último punto la falta de compensación entre el adelgazamiento y el alargamiento puede comprobarse con la observación, puesto que el perímetro del cuadrado es igual a cuatro veces la longitud de uno de los ochos elementos, o sea, *4L*, y que, disponiendo a éstos en rectángulos cada vez más largos, se ve ya que el perímetro de *R1* es de *4L* más los lados; el de *R2* es de *8L* más los lados y el de *R3* de *16L* más los lados. Por el contrario, la disminución de superficie en *A* no se destaca por una falta de compensación tan visible, salvo en *R3*. Así también solamente una cuarta parte de los sujetos cuyas respuestas se consideran correctas admiten la disminución de la superficie de los *R1*; los otros sólo comienzan (*) a partir de *R2*. Pueden invocarse entonces dos factores. El primero es la impresión perceptiva global: "El cuadrado era mucho más grande que el rectángulo", dice un sujeto de 7;3, "porque hay mucho más lugar en un cuadrado", o "la superficie se ha vuelto más larga y más angosta, es más pequeña" (9;3). Pero eso sigue siendo demasiado subjetivo, mientras que probablemente pueda intervenir un segundo factor: en la acción misma de tirar de la cuerda el sujeto podría tener la impresión (pero sin toma de conciencia) de que no se puede mantener una altura suficiente aumentando la longitud; dicho de otro modo, que habrá adelgazamiento indefinido: ningún sujeto expresó esta anticipación, la cual, por otra parte, no le fue pedida para no sugerir nada y que es bastante tardía, pero es posible que una anticipación sensomotriz preceda a su representación y cumpla una función en las respuestas correctas.

De todos modos, esa falta de compensaciones para la superficie en *A* y para el perímetro en *B* conllevan seguramente una mezcla de abstracciones empíricas (lecturas perceptivas) y reflexionantes (coordinación de las dos dimensiones). Por el contrario, la cuasi generalidad momentánea de las conservaciones dobles del nivel IIB solo puede tender a una primacía progresiva de la abstracción reflexionante, ¡pero con la consecuencia de que entonces conduce excepcionalmente al error! Ahí se plantea, pues, un problema. Las dos suposiciones correctas de las que parte el sujeto en estas abstracciones son: 1) que al cambiar la forma de una figura o de un cuerpo para darle una configuración cercana se conservan sus propiedades principales, y 2) que esas conservaciones se manifiestan entonces por una compensación entre las variaciones según las dos dimensiones en juego. Seguros de la posesión de esta estructura general (que comienza en IIA pero alcanza un grado más alto de abstracción generalizadora en IIB), los sujetos apenas observan entonces

(*) En *R1* la superficie solo pasa de 625 a 525 cm^2; *R2*, en cambio, desciende a 225 cm^2.

el detalle de las modificaciones (¡un sujeto de 11;9 va a sostener, incluso, que en *R3* de *A* la superficie se conserva "entre las dos líneas"!) y sobre todo no se plantean el problema de saber si la superficie y el perímetro se pueden conservar juntos, lo que de hecho es contradictorio. Se puede, por lo tanto, decir que en su principio la abstracción que inspira a esos sujetos es correcta pero que la doble aplicación que ellos imaginan exigiría, además del control de los hechos (siempre necesario para establecer si tal modelo deductivo, válido en sí, es aplicable o no a tal o cual sector de la realidad), una reflexión de un nivel superior, o reflexión "sobre" las reflexiones anteriores, de manera tal que pueda examinarse si ese conjunto de dos conservaciones es coherente o si éstas son incompatibles.

§ 3 | LAS COMPARACIONES: ESTADIO I. — Al pasar a los resúmenes formulados por los sujetos después de las pruebas *A* ó *B*, y a las comparaciones finales se pueden distinguir cuatro niveles: I, IIA, IIB y III. Durante el estadio I los resúmenes separados dan primero, respecto de *A*, una descripción del material que ha sorprendido visiblemente al niño (sobre todo en el orden *BA*), primero por oposición a los simples desplazamientos de elementos en *B*, y, después, una evocación de las acciones pero sin toma de conciencia de una dirección de conjunto (otra vez de modo contrario a *B*, donde los desplazamientos están orientados). Pero lo que sorprende sobre todo es el carácter aproximativo de los recuerdos de las evaluaciones cuantitativas que, sin embargo, acaban de ser enunciadas por los sujetos:

MIC (6;9 véase en § 1) para *A*: "*Había cuatro clavos, una cuerda alrededor y una plancha. Se debía cambiar el tamaño: eso daba otros tamaños.* — ¿Y si debieras explicar lo que pasa con los tamaños? — *La cuerda se hacía más pequeña, no quedaba del mismo largo. No todo el tiempo.* — ¿Y el tamaño adentro? — *Se volvía más pequeño.* — ¿Y la primera vez? — *Pequeño a medias y al final grande.*" Y para *B*: "*Se hacen largos, y después un poco más delgado y más largo. El borde era más largo en el medio, más pequeño y después cambió de forma: largo, mediano y después grande.*"

PHI (6;4) en el orden *BA*. Para *B*: "*Hice rectángulos.* — ¿Cómo? — *Con las esquinas* (ángulos), *más grandes y más pequeñas.* — ¿Qué te pedí? — *No sé.* — ¿La cantidad de papel? — *Se hizo más grande.*" Es lo que él había dicho al precisar cada vez "*se ha agregado*". Para *A* la superficie y la cuerda se hacían "*más pequeñas*". Ahora bien, en la comparación de los dos juegos Phi solo retiene para el conjunto una reducción general.

Es evidente que en estas condiciones la comparación de los dos juegos no conduce a una abstracción reflexionada sobre las distintas transformaciones de las superficies y los perímetros en *A* y en *B*, sino a diferentes formas de fusión, como el ejemplo que acaba de dar Phi, o a oposiciones erróneas:

MAR (6;7) dice que en los dos juegos, la superficie y el perímetro: "*era grande, pequeño y después mediano.*"

FRO (6;5): "¿Cambia lo mismo? — *No.* — ¿La superficie? — *Los dos más pequeños.* — ¿Y después la barrera? — *Hacía lo mismo.*"

JAC (6;10) recuerda que la superficie con la cuerda *"se hacía más pequeña y el cartón más grande"*, lo que representa un progreso respecto de los sujetos precedentes, pero en su reconstrucción la cuerda se hacía *"más pequeña"*, mientras que la madera permanecía constante en *B*.

PAS (6;5): *"Hicimos un montón con formas, discutimos con los cartones (B). Eso (A) era para hacer formas con la cuerda.* — ¿Pero los dos juegos? — *Eran juegos diferentes, casi los mismos.* — ¿Y las cantidades de madera y de cartón? — *Eso hizo a la madera más grande* (en *A*: había dicho *"lo mismo pero más delgado"*). — Y en total, ¿qué daba? — *Más en un juego (A), menos en el otro* (*B*: lo había afirmado y después había pasado a la permanencia). — ¿Y los bordes? — *Quedó lo mismo* (*A* y *B*)."

JAN (7;0): *"Con los cartones (B) se hacía un cuadrado que se volvía más grande.* — ¿Y el borde? — *También.* — ¿Y en el segundo juego (*A*)? — *Lo mismo también.* — ¿La superficie? — *Más larga y el borde también* (sin embargo había afirmado la disminución de la superficie y la constancia de la cuerda, mientras que en *B* había dicho *"más grandes"*)."

En una palabra, tanto lo resumido por las experiencias *A* ó *B* como las comparaciones entre las dos solo le dan al estadio I (sin hablar del hecho habitual de centrarse en el material, las formas y las acciones) esquematizaciones por identificación de los resultados (todo se achica o se agranda) o por oposiciones, pero no conformes a las últimas operaciones sostenidas por el sujeto ante los problemas.

§ 4 | LAS COMPARACIONES: ESTADIOS II y III. — A comienzos del nivel IIA, que es el de las respuestas correctas (pero que precede a las conservaciones generalizadas del nivel IIB), se asiste al curioso fenómeno de resúmenes correctos para cada una de las dos experiencias, pero con una clara tendencia a la identificación en el momento de las comparaciones:

FRA (7;6 cuyas primeras respuestas hemos visto en el § 1) resume bien el problema *A*: "¿Qué he preguntado? — *Si el perímetro era más grande, más pequeño o igual.* — ¿Y qué más? — (Lo mismo para la superficie.) — ¿Qué pasó? — *La superficie se hizo más pequeña.* — ¿Y el perímetro? — *Siempre del mismo tamaño.*" Para *B* recuerda las respuestas que hemos visto (en el § 1). Por el contrario, para las comparaciones: *"Eran los mismos juegos, salvo que uno era con los rectángulos de cartón y otro con los clavos.* — Una muchacha de tu clase me dijo que eran diferentes. — *Sí, están los clavos y los cartones.* — ¿Es la única diferencia? — *Sí.* — ¿Y lo que pasó con la superficie? — *Tenía siempre el mismo perímetro y la misma superficie.* — Pero vuelve a pensar bien en los dos juegos. — *Sí,* (la superficie) *es siempre igual. Era la misma con los rectángulos* (*A*) *y con los cartones.* — ¿Y la cuerda? — *También.* — ¿Y la madera de adentro? — *Siempre la misma.* — ¿En los dos juegos? — *Sí.*"

REN (7;9) resume *A*: *"El tamaño se hizo más chico, la cuerda es la misma."* Y *B*: *"Es el mismo tamaño* (superficie) *pero el límite para el último rectángulo "era más grande"*. En la comparación, por el contrario, Ren admite que en *A* la superficie *"cambiaba"*: "¿Y en el segundo juego? — *No cambiaba.* — ¿Y el límite con la cuerda? — *No cambiaba.* — ¿Y en el segundo? — *Tampoco.* — ¿En los dos juegos era lo mismo? — *Sí, lo mismo.*"

CAR (7;11) que para *B* afirma la conservación de la superficie "*con el mismo número* (cantidad) *de cartones*", pero también el aumento del perímetro "*porque el rectángulo es más largo que el otro*", en la comparación únicamente retiene la oposición entre *A* y *B* en cuanto a la superficie, pero ambos perímetros se han tomado constantes.

NAT (7;7) y GUA (7;7) se limitan a declarar que en los dos juegos los rectángulos se volvían "*cada vez más largos.* — ¿Y qué más? — *Cada vez más delgados.* — ¿Y qué pasaba cuando se cambiaban las cantidades en el interior y después en los bordes? — *Era lo mismo*". (Gua, pero Nat emplea casi los mismos términos.)

STE (8;11), por el contrario, anuncia la segunda fase del nivel IIA, es decir una comparación del mismo tipo que los resúmenes, pero es tan poco estable que vuelve a incurrir en las falsas oposiciones después de algunos días. Al final del interrogatorio, dice, en efecto, que en *A* "*el límite no ha cambiado, pero es el tamaño* (superficie) *lo que ha cambiado*", mientras que en *B* "*el tamaño era el mismo pero el límite era más grande*". Pero después de una semana este recuerdo se esquematiza del siguiente modo: "*Allá* (*A*) *el tamaño y el límite son los mismos, y aquí* (*B*) *el tamaño y el límite se volvían más grandes.*"

Las reacciones de identificación de Fra a Nat y Gua se podrían interpretar de dos maneras: o bien considerarlas como el comienzo de las dobles conservaciones del nivel IIB, como si su abstracción "reflexionada" sobrepasara, en el sentido de las compensaciones generalizadas, sus razonamientos "reflexionantes" anteriores; o bien, no ver en ello nada más que una insuficiencia de abstracción reflexionada que conduce, entonces, a esquematizaciones análogas a las del estadio I, pero más coherentes, ya que están orientadas hacia la conservación. Ahora bien, esta segunda interpretación parece imponerse por dos razones. La primera es que por regla general la abstracción reflexionada está retrasada respecto de las abstracciones reflexionantes, y por eso no se entendería claramente que en ese caso sea del nivel IIB cuando las otras quedan en el IIA. La segunda es que en una segunda fase de ese subestadio IIA, la comparación de los dos juegos pasa a hallarse en conformidad con los resúmenes de cada uno, cosa que se ve aparecer ya en Ste pero en forma inestable, mostrando claramente que se trata de un comienzo. Veamos la serie:

ALA (9;3) después de resúmenes exactos compara los dos juegos diciendo: "*Cuando se cambia la forma del rectángulo conservando la misma cuerda la superficie cambia* (= "*más pequeña*", dijo desde *R2)*" y para *B*: "*El perímetro ha cambiado y la superficie es la misma*" (desde *R2* había dicho que el perímetro "*se ha alargado*").

CAT (9;8) resume el todo: "*En el primer juego* (A) *el tamaño se volvía más pequeño; en el segundo* (B), *era el borde el que se hacía más largo*" en tanto que las otras dos variables se conservan.

Tales respuestas, que marcan la adecuación de la abstracción reflexionada a los razonamientos efectivos del sujeto durante la interrogación, parecen caracterizar el término de esta compleja evolución. Ahora bien, no hay nada de ello, puesto que desde los 9 años y hasta los 11 se van a imponer

nuevas reacciones con primacía general y abusiva de las conservaciones basadas en las compensaciones supuestas. Solo después de esta fase aparentemente regresiva se hallarán respuestas análogas a las de Ala y Cat; ¿dónde está entonces la diferencia? Consiste en que la abstracción reflexionada de esos sujetos solo corresponde aún a una toma de conciencia retrospectiva (o reconstitución) de las relaciones descubiertas paso a paso en contacto con las figuras, o sea con la colaboración continua de las abstracciones pseudoempíricas, mientras que las reacciones correctas finales, aunque puedan proceder del mismo modo en cuanto a su formación, agregarán a ello una "reflexión sobre lo reflexionado", es decir un paso reflexivo, suplementario o "metarreflexivo", que proporciona la razón, y no solo el enunciado descriptivo de esas relaciones.

Pero antes de llegar allí veamos ejemplos del nivel paradójico siguiente:

CHA (11;9) sostiene con energía la conservación de las superficies y perímetros, incluso en *R3* de *A*, donde la superficie se ubica "*entre las dos líneas*", o sea, entre las cuerdas tendidas sobre los dos clavos, ¡sin intervalo medio visible! Su comparación entre los dos juegos es por tanto, obvia: todo es parecido, y cada nueva figura rectangular "*daba lo mismo, porque la primera figura era ancha y no muy larga, la segunda (R1) más larga y menos ancha...*", etcétera.

GEO (11;2), los dos juegos eran "*parecidos, porque son las mismas figuras*". Las mismas compensaciones entre largos y anchos: "*Los lados, la superficie no ha cambiado.* — ¿Y el perímetro? — *Tampoco.* — Y aquí (*R3 de A*), ¿qué es lo diferente? — *Hay una diferencia de longitud.* — ¿Y crees que eso no afecta para nada? — *¡No ha cambiado nada!*".

CAL (11;5), las mismas reacciones: "*Si las superficies se hacen más largas, hay más longitud y menos ancho, y da como resultado lo mismo.*"

AUD (12;1), por el contrario, admite que todo era "*siempre igual, salvo en el último* (*R3* de *A*)."

Estos casos son admirables por el rigor deductivo en el desprecio de los hechos y recuerdan ciertas célebres frases de Descartes a propósito de las leyes del choque. Es verdad que se trata de sujetos que, por lo demás, pertenecen al estadio III pero en los que perseveran las reacciones IIB. Sin embargo, si bien su abstracción "reflexionada" traduce exactamente el proceso "reflexionante" que los ha llevado a suponer que todas las covariaciones inversas (largo y altura) implican una compensación y, por tanto, una conservación, lo que aún les falta es una reflexión de grado superior (o reflexión sobre lo reflexionado) que les impondría, entre otras cosas, una ley de continuidad: si en *R3* de *A*, la superficie ha desaparecido, cosa que Aud admite y los otros en realidad ven claramente, ¿por qué no admitir que la disminución ha comenzado en *R1*?

Es esta reorganización reflexiva la que caracteriza las reacciones del nivel III:

CLA (11;5) en el orden *BA* comienza como los precedentes: conservación de la superficie y del perímetro en *B* "*porque había la misma cantidad de tiras*"; después

corrección en *R3*, donde "*el perímetro se hacía más largo*". En *A*: del mismo modo, conservación general para *R1* y *R2*, pero en *R3* disminución de la superficie "*porque aquí* (*R1* y *R2*) *se podía tomar* (su contenido) *y reformar el cuadrado, mientras que con aquél* (*R3*) *sería necesario mucho más* (se requiere mayor cantidad de piezas)". Ahora bien, en la comparación de los dos juegos, generaliza a todas las transformaciones y llega a la fórmula explicativa siguiente: "*Cuando la superficie cambia, el perímetro no cambia, y cuando la superficie no cambia, el perímetro cambia: los dos cambian, pero no al mismo tiempo. No es difícil porque ... los dos no cambian al mismo tiempo.*"

Cla descubre, pues, que si el mecanismo habitual de las conservaciones por compensación y reversibilidad (rehacer el cuadrado con las piezas del rectángulo) es aplicable tanto en estas situaciones como en las otras, las dos conservaciones, la de la superficie y la del perímetro, son incompatibles, y ese es el producto de un paso reflexivo que se agrega a la abstracción reflexionada simple de los sujetos como Ala y Car.

§ 5 | CONCLUSIÓN. — En total, se pueden distinguir en estos hechos cinco fases sucesivas de abstracción. La primera corresponde al estadio I y se caracteriza por un *maximum* de abstracciones empíricas (o pseudoempíricas) mal coordinadas y por esbozos muy incompletos de abstracciones reflexionantes y reflexionadas extraídas de las coordinaciones de acciones y que se manifiestan en los resúmenes. La segunda fase es la de los comienzos del nivel IIA, donde las respuestas correctas se basan en una abstracción reflexionante activa, pero permanentemente reguladas en el caso de conservaciones como resultado de abstracciones pseudoempíricas (lecturas de los hechos) e incluso dirigidas por ellas en el caso de ausencia de conservaciones. En cuanto a la abstracción reflexionada, es suficiente para arribar a resúmenes correctos en *A* y en *B*, pero insuficiente para permitir una comparación correcta de los dos juegos. La tercera fase (segunda mitad del subestadio IIA) conduce, por el contrario, a este último progreso, pero todavía sin una nueva "reflexión" sobre lo "reflexionado". En el nivel IIB (cuarta fase) la abstracción reflexionante predomina hasta tal punto que el sujeto deforma la mitad de los hechos, rechazando así los controles de la abstracción pseudoempírica y la abstracción reflexionada (en ocasión de las comparaciones) refuerza aún más esta tendencia. Durante la quinta fase, finalmente (estadio III), la abstracción reflexionada se desdobla en una reflexión sobre esta reflexión, lo que permite al sujeto extraer la incompatibilidad de las dos conservaciones, abusivamente acumuladas en el nivel precedente.

Desde el punto de vista del espacio, esos resultados muestran con evidencia que la abstracción empírica (o pseudoempírica) no se basta a sí misma, al proporcionar solo los datos de hecho sin reunir en un todo el sistema de transformaciones y, sobre todo, sin dar las razones de ello. Pero sigue siendo necesaria en la medida en que los modelos deductivos del sujeto deben aplicarse a objetos, y la cuarta fase muestra suficientemente hasta dónde conduce su omisión. En cuanto a la abstracción reflexionante, es fuente contínua de novedades, porque conduce a nuevas "reflexiones" en cada uno de los planos sucesivos de "reflejamiento", y porque estos se

engendran sin que su serie quede jamás completa: de la acción a la representación y de esta a los relatos (resúmenes), después a las comparaciones y, por último, al pensamiento reflexivo de la quinta fase, existe una continuidad de engendramiento, y en cada estadio la "reflexión" reorganiza un nuevo sistema, cada vez con mayor coherencia e integración hasta aprehender la "razón" de las estructuras elaboradas anteriormente (la que se apoyará después en muchas otras razones, pero en estadios que sobrepasan a los nuestros, o sea en niveles metarreflexivos cada vez más elevados). En una palabra, el doble proceso del "reflejamiento de los reflejamientos" inferiores y de la "reflexión sobre las reflexiones" precedentes, constituye un dinamismo ininterrumpido, algunas de cuyas etapas más simples hemos procurado caracterizar.

Los movimientos de un proyectil suspendido

EN COLABORACIÓN CON M. A. e I. FLUCKIGER

Desde hace largo tiempo sabemos que en todos los niveles del conocimiento, desde la infancia hasta el pensamiento científico, no podría haber interpretación, ni siquiera lectura de la experiencia física, sin un marco asimilador lógico matemático, lo que equivale a decir que la abstracción empírica es siempre solidaria de abstracciones reflexionantes. Pero el detalle de estas relaciones plantea todavía muchos problemas, en particular en los estadios elementales. El papel de las estructuras elaboradas por abstracción reflexionante, o sea, a partir de la coordinación general de la acción, ¿es solo asimilador y estructurante, o hay interacción entre las dos formas de abstracción? En caso de interacciones aparentes, ¿se trata de una diferenciación progresiva a partir de una indiferenciación relativa inicial (debida a la falta de fronteras estables, en el seno de las actividades primitivas, entre las acciones como tales y su coordinación), o existen intercambios propiamente dichos, de modo tal que la abstracción empírica presta a las abstracciones reflexionantes servicios análogos a los aportes recíprocos? Y, sobre todo, en el curso de los tanteos propios de los niveles iniciales, ¿sólo se producen faltas en el terreno de las abstracciones físicas, o bien la abstracción reflexionante puede ser también raíz de errores?; y, en este caso, ¿de qué tipo?

Son estos los problemas que quisiéramos abordar a propósito de experiencias físicas donde los datos de hecho son particularmente apremiantes: estando las balas suspendidas de un techo de 3,50 m de altura, ¿cómo hará el sujeto para lanzar una a otro personaje o para servirse de ella como proyectil que alcance un bolo en posiciones variadas? ¿Cómo se representará el sujeto las trayectorias de las balas y, finalmente, por medio de cuáles

estructuraciones llegará a comprender que el conjunto de esas trayectorias engendra una concavidad hemisférica y no se distribuye a lo largo de un plano? Hay una serie de problemas en cuya solución las acciones del sujeto cumplen una función esencial, de donde surgen las posibilidades de abstracciones reflexionantes, pero con un control continuo sobre los objetos mismos, lo que exige una lectura permanentemente renovada del resultado de las experiencias, es decir una intervención necesaria y abundante de abstracciones empíricas cuyas relaciones con las precedentes procuraremos establecer.

La técnica adoptada consiste, en primer lugar, en precisar la diferencia entre "soltar" una bala desde un punto dado y "lanzarla". Cuando el niño entra en la habitación, el experimentador tiene la bala en la mano para evitar que cuelgue en medio del local y, una vez definido el término "soltar" se pide primero que prevea la trayectoria de una bala que se suelta sin más desde una cierta altura, después de haber mostrado bien que la bala está unida a una cuerda: en caso de que ello sea necesario, se hace que el sujeto imite ese trayecto con la mano, o por medio de una bala sostenida en la mano, para ver si el trayecto previsto es horizontal o tiene alguna curva, y cuál es. Después se pasa a los problemas de dirección haciendo puntería hacia un único bolo. Cuando el niño ha ocupado una posición cualquiera, se comienza por ubicar un bolo inaccesible (desviado entre 20 y 30° respecto del punto que estaría frente al sujeto) para ver lo que él prevé y, en caso de hacer un intento, lo que propone en cuanto a "lo que hace falta para alcanzar el bolo" (cambios de posición del sujeto o del bolo). Una vez que éste haya sido alcanzado, se lo desplaza para examinar la adaptación a esta nueva posición.

Después viene el análisis de las alturas. Se dispone para esto de bolos de 35 cms de altura, de otra serie de 25 cm, de cajas de 5 cm y a veces de banderines de 1,30 m con soporte: los problemas consisten en prever dónde serán tocados los bolos, o lo que fuere según su posición. Después de algunas previsiones y pruebas se le pide además que ponga algunos bolos de manera que, al soltar sucesivamente los proyectiles, todos sean alcanzados en su parte superior (o a media altura), etcétera. Una vez que los bolos grandes están dispuestos, se plantea el mismo problema con algunos bolos pequeños (sin quitar los grandes). El problema es, naturalmente, juzgar las reacciones del niño en relación con el "medio" y con la periferia de las trayectorias, siendo las propiedades de ese medio (el punto más bajo, el lugar necesario de paso de cada bala, el lugar donde dos balas se pueden cruzar) objeto de preguntas separadas.

Quedan, por último, los problemas referidos al cruce de dos balas soltadas por el niño y el experimentador desde posiciones diferentes y, para concluir con el problema, el resultado de todas las trayectorias reunidas, o sea una hondonada hemisférica.

§ 1 | EL ESTADIO I. — El nivel IA se caracteriza por reacciones inadecuadas, bastante sorprendentes, que plantean de entrada los problemas mencionados más arriba:

JAC (4;8) no prevé adónde irá la bala una vez soltada; después, tras una comprobación, no puede decidir si la bala irá hacia adelante, pasando por el centro, o sobre un punto lateral (casi 45°). Se pone un bolo a un costado (ángulo análogo, pero en otra dirección): Jac no sabe si será tocado: "¿Y si tuvieras que adivinar? — (Mira el techo y después suelta la bala, que no alcanza el blanco.) — ¿Se va a llegar? — (Vuelve a comenzar pero con impulso.) — ¿Dónde hay que poner el bolo?" Lo desplaza sucesivamente equivocándose todas las veces después, para llegar, se desplaza al otro lado del punto que convendría, después vuelve a su lugar inicial (error

inverso o en espejo) pero tras algunos vaivenes, en el curso de los cuales varía el impulso, se detiene a mitad de camino y acierta: "*Así anda*" y dos veces seguidas queda enfrente. Se coloca un bolo pequeño en lugar del grande y la bala pasa por encima sin tocarlo: para acertar Jac alínea entonces cuatro bolos sobre la tangente en ese punto; los junta después de errar y luego los separa demasiado, siempre sobre la tangente y sin ocuparse del círculo cuyas líneas extremas quedan muy alejadas: entonces aumenta el impulso, pero sin comprender. Se le pregunta por último si hay más posibilidades de dar en el bolo acercándolo al centro o alejándolo más: "*Allá* (más lejos)."

GER (4;8) prevé que la bala, al ser soltada, irá hacia adelante pasando por el centro, pero cuando se le hace dar vuelta hacia este, cree que la bala saldrá ante él "*siempre derecho así* (prueba). *No, va hacia allá* (hacia su espalda). — ¿La bala va alto o bajo? — *Alto.* — Muéstralo con esta. — (Lleva la bala libre en línea recta pero a la misma altura.) — ¿No hay lugares donde vaya bajo (nuevo ensayo)? — *No* (sin embargo miró dos veces). — Mira bien. — *Sí, allá* (¡cerca de él! Al nivel del suelo)". Se pone un globo a 60° de la posición del frente: "¿Puedes tocarlo? — *Sí* (prueba), *no, va hacia allá.* — ¿Y si quieres atrapar el globo? — (Se acerca por etapas en vez de ponerse enfrente y termina por ponerse detrás de él) — Ahora soy yo quien suelta la bala: ¿dónde te colocarás para atraparla? (Se pone enfrente) — Yo voy hacia allá. ¿Dónde te colocarás para arrojarla hacia mí? (Se queda en el mismo lugar pero volviéndose hacia el experimentador y fracasa.)"

TOM (4;11) desplaza siempre el blanco al sitio que la bala había alcanzado en el tiro anterior.

ISA (5;6). Bolos: "*Lo tengo conmigo, pero aquí no llega.* — ¿Adónde va la bala? — *Siempre hacia la izquierda.* — ¿Y si te desplazas? — *Si me pongo aquí* (1, a la izquierda del punto que es el frente) *la bala va hacia allá* (el mismo lado) *y si me pongo aquí* (2, a la derecha) *la bala va hacia allá.*" ISA supone, pues, dos trayectos paralelos, que forman dos cuerdas bastante cortas. — "Prueba. — (Ella suelta desde el segundo punto, y después se pone enfrente.) — ¿Y si te pones allá (punto 2)? — *Va allá* (como estaba previsto antes): *¡si la hago ir derecho* (también) *puede ir allá!*".

Examinemos además los casos del nivel IB, análogos a los precedentes pero con el progreso de que descubren una parte de la función del gancho en relación con las direcciones:

BEY (5;3) bolo a 30° del punto que está frente al niño: "*La bala va a caer así.* — ¿Seguro? — *Sí* (prueba). *No ha caído, va hacia la izquierda.* — ¿Cómo hacer? — (Se desplaza en sentido correcto y acierta.) *Me puse en el medio.* — ¿De qué? — *De la sala.* — (Se pone el bolo a 40°.) — *Me pongo aquí* (sentido inverso, o sea acercándose al bolo). — (Fracaso) ¿Qué habría que hacer? — *Desplazar el gancho, ponerlo en la alineación* (entre el bolo y ella). — (Se quita el bolo.) Si te desplazas hacia allá, ¿a dónde irá la bala? — *Allá* (muestra una corta cuerda, o sea, un trayecto desde su costado sin pasar por el centro). — Prueba. — *Va allá* (cree ver el trayecto previsto). — ¿Y si vas hacia allá (al otro costado)? — *Va allá* (de nuevo una cuerda corta: cf. Isa en IA). — Pero para apuntar al bolo, ¿dónde hay que ponerse? (se vuelve a poner el bolo)? — *En el medio.* — ¿Entonces?" (Se pone enfrente sin soltar la bala, después vuelve al costado, la suelta, fracasa, y, por último, vuelve a comenzar de frente.) Entonces se hace variar la posición del bolo entre ella y el centro, para plantear el problema de la altura. Comienza con una intuición correcta después de haber comprobado las variaciones: cerca del centro, la bala "*tocará más*

abajo. — ¿Y aquí (cerca del lanzador)? — *No va.* — Mira. — *Más arriba.* — ¿Por qué? — *Porque está más cerca de usted.* — ¿Dónde hay que poner el bolo para que pase lo más bajo posible? — (Muy alejado del centro: no ha comprendido.) — ¿Pero para tocarlo muy abajo? — (Lo aleja más.) — ¿Y si lo pongo muy lejos (del centro)? — *Lo toca muy abajo.* — Mira bien. — Más bajo, más alto, etcétera. (buena lectura). — ¿Entonces cómo podrías decirlo? — *A veces toca abajo y a veces arriba.* — ¿Pero cuándo? — *Este es tocado más abajo y aquel, que está más lejos, arriba.* — ¿Siempre? — *No, a veces no toca* (= de esta manera)".

COR (5;6): "Si se suelta la bala, ¿a dónde irá? — (Correcto.) — ¿Y para apuntar a esa estaca (un banderín a 20° del punto que está enfrente)? — (Se desplaza en la dirección de la estaca: fracaso.) — ¿Qué hacer? — *Ponerlo aquí* (enfrente de su posición inicial, pero él permanece en su posición lateral)." Después, frente a una estaca oscila entre esta posición lateral y otra, en espejo en relación con la primera, es decir, del otro lado, como si la simetría fuera buscada solo en función del objeto y no en función del centro (o sea, en frente). Finalmente, logra el objetivo en el frente y lo mismo para dos bolos sucesivos. En cambio, cuando se introduce una segunda bala, no generaliza lo que acaba de descubrir del pasaje por el centro: se considera que las balas se encuentran partiendo cada una de la extremidad de una corta cuerda (cuyo arco equivale aproximadamente a 90°). Se las suelta y él queda muy sorprendido por sus trayectos: "*Se cruzan.*" No vuelve tampoco a la solución de la cuerda. Respecto de la altura de la bala, dice que para disminuirla hasta alcanzar un bolo pequeño: "*hay que hacer la cuerda más baja.*"

ARN (5;6) prevé una dirección relativamente correcta para la bala sola, pero cree poder alcanzar después un bolo desviado unos 30°: "(Prueba.) *No, se fue hacia allá abajo; irá siempre hacia allá.* — ¿Por qué? — *Porque el hilo es así* (muestra la cuerda y el gancho). — ¿Y si retrocedes (hasta atrás del mismo punto del frente)? — *¡Ah, quizás!* — ¿Y si te pones allá (150° del bolo)? — *Eso no anda. Hay que poner el gancho aquí* (entre él y el bolo)." No deja de intentar repetidas veces alcanzar el bolo a partir de posiciones laterales, porque la ley del pasaje por el centro no le parece aún necesaria: "*No voy a llegar nunca.* — ¿Por qué? — *Porque el hilo está allá, el gancho allá.*" Todavía queda el problema de la altura, al pasar la bala por encima del bolo: "*La bala está demasiado alta. Si el hilo fuera más largo se podría tocar el bolo.*" Se pone a este sobre una caja: acierto; después se quita la caja. Entonces varía las posiciones, de nuevo lateralmente o alejándose del centro; después alcanza una vez el objetivo cuando el bolo está cerca de este, pero Arn no extrae de allí la curva de las variaciones en altura.

RIC (6;6). Las mismas reacciones, pero intentando representar la curva en altura: primero un trayecto horizontal elevado que baja hacia el bolo mucho más allá del centro; después el mismo trayecto pero con un descenso menos retrasado; luego una curva correcta a medias (descenso progresivo hasta cerca del centro, pero todavía más allá); pero para un bolo que está en el frente (180° del sujeto), retorno a la línea horizontal que atraviesa todo el círculo con descenso brusco cerca del bolo en el otro extremo.

REN (9;6) a pesar de su edad representa todavía el trayecto de la bala o como una línea horizontal, cuando pasa por encima del bolo, o como dos horizontales que forman dos ángulos rectos (‾‾|__) cuando la bala golpea el bolo en el frente o a media altura.

Todos estos hechos son destacables por las dificultades de abstracción y de generalización que testimonian: en efecto, en el nivel IA hay poco parentesco entre las respuestas a las tres preguntas que, para nosotros, son una sola: el trayecto de la bala misma y el que vincula al niño con otro personaje o con un bolo. Respecto de la bala sola, Jac no prevé todavía su trayecto, pero Ger y los otros anticipan un punto de partida en el frente pasando, por tanto, más o menos por el centro (¡mientras que Ger generaliza equivocadamente ese punto de partida frente a él cuando se da vuelta hacia al centro!). Pero esta relación "de frente" no significa solamente frente al centro, y es, además, relativa al propio cuerpo, de modo que para lanzar la bala al experimentador ubicado lateralmente, el niño cree que basta con girar sobre sí mismo y mirar frente a él en la dirección del compañero (véase Ger, entre otros casos). En cuanto a los bolos y los elementos análogos, el sujeto reacciona como si la bala estuviera libre (sin cuerda) y como si bastara, pues, con apuntar bien hacia el objetivo, lo cual constituye otra manera de ponerse "de frente". Como estas tácticas conducen a fracasos, hay entonces correcciones, y éstas son igualmente significativas: consisten, naturalmente, en primer lugar, en reforzar el impulso como si la dirección no cumpliera ningún papel y el éxito dependiera solo del impulso, pero sobre todo consisten en acercarse al objetivo, lo que en general conduce a un desplazamiento en sentido erróneo, lo cual, sin embargo, es normal si se olvida la cuerda y su centro de fijación.

Pero, cosa interesante, las generalizaciones propias del estadio I no son solamente relativas a la acción del sujeto (ponerse de frente en todos los sentidos indicados o acercarse al objetivo) y en dos casos relativas al objeto o (en el primero) al acierto en la acción sobre el objeto. Esta primera variedad consiste, cuando el bolo ha sido desplazado en ponerse uno mismo en la posición en que el bolo fue alcanzado antes de su desplazamiento, o bien, cuando el sujeto se desplaza, en volver a poner el bolo en el sitio en que fue tocado en el golpe anterior (Tom). El segundo caso es más curioso: cuando hay fracaso a partir de una posición lateral el sujeto se pone "en espejo" respecto de ella, es decir simétricamente en relación con el objeto solo y no en relación con el centro. Isa (como Bey en el nivel IB) sostiene este tipo de simetría al punto de admitir, a partir de los puntos de origen en espejo, dos trayectos paralelos cada uno de los cuales sigue una corta cuerda (de 80-90° aproximadamente).

Por último, en relación con la altura, estos sujetos se representan la trayectoria como horizontal y elevada, y como si descendiese bruscamente hacia el objetivo al final del trayecto, es decir, no en el centro sino en el punto más alejado del inicial.

En el nivel IB se encuentran todas estas reacciones primitivas, pero con el notable progreso del descubrimiento del gancho y de la fijación de la cuerda en ese centro: de ahí las mejoras en las previsiones, como en Arn que no llega tampoco a posiciones laterales, entre otras, cuando procura resolver el problema de la altura. Respecto de esta, ningún sujeto del nivel I llega, como ocurrirá en IIA, a representarse la curva de la bala como descendente y luego ascendente: Ric llega por un momento a una curva descendente (primera mitad de la curva correcta) y Arn descubre momentáneamente el

descenso hacia el centro, pero todos en general se quedan en una trayectoria análoga a la del nivel IA.

¿Como interpretar entonces estas sorprendentes lagunas de la abstracción y de la generalización? Durante todo el estadio I, en efecto, las lecturas en caso de fracaso son notablemente poco diferenciadas: el sujeto simplemente toma nota del hecho de que ha fallado, sin buscar las razones, y en los ajustes ulteriores no se tienen en cuenta. Incluso cuando se hace seguir la bala con la mano teniendo la cuerda extendida, lo cual debería resultar instructivo, no enseña nada al sujeto.

De hecho, casi todos los errores de los sujetos vinculados con la omisión de la cuerda y de su punto de apoyo (incluso en el nivel IB donde su descubrimiento no modifica gran cosa), se pueden atribuir a la imposición de las coordinaciones iniciales, que consisten en ubicarse, para alcanzar el objetivo, enfrente de él y lo más cerca posible: ¡esa sería entonces una abstracción reflexionante a partir de coordinaciones elementales de acciones que falsearía las abstracciones empíricas! Se encuentran así los tres problemas planteados en nuestra introducción: el de las indiferenciaciones o diferenciaciones entre las dos formas de abstracción, el de su interacción posible o de las acciones en sentido único (siendo una estructurante y pudiendo la otra serlo a su vez o solamente quedar estructurada) y el de los posibles errores de la abstracción reflexionante.

Ahora bien, las reacciones de este estadio I permiten una respuesta provisional a cada una de estas cuestiones. En primer lugar, si el esquema de orientación hacia un blanco ubicándose frente a él y lo más cerca posible, supone, ciertamente, una coordinación de acciones, especialmente espaciales, no es menos claro que los aciertos de este esquema dependen de comprobaciones empíricas y no solo de inferencias: se trata, pues, de un esquema en buena medida indiferenciado, mientras que en el nivel IIIB, cuando el sujeto deduzca la existencia de una concavidad hemisférica a partir de algunas comprobaciones hechas sobre las trayectorias aisladas (ya deducidas ellas mismas de las relaciones bala-cuerda-gancho en el centro), la diferenciación entre coordinaciones y observaciones, o sea entre los dos tipos de abstracciones, habrá avanzado mucho más.

En segundo lugar, incluso en un esquema poco diferenciado, y *a fortiori* en los que lo están más, la colaboración entre las dos formas de abstracción no es recíproca. Extraída de las coordinaciones de la acción y fuente de nuevas coordinaciones, la abstracción reflexionante es esencialmente estructurante, mientras que la abstracción empírica (o física, en el sentido experimental) proporciona los datos, plantea los problemas y verifica las soluciones mediante aciertos y errores: colabora, pues, en un sentido con la otra forma, pero en el sentido en que un control exterior colabora con la invención sin producir sus construcciones, mientras que en el límite (niveles formales) la construcción conllevará su autocontrol deductivo. Los aportes entre los dos tipos de abstracción no son, pues, de la misma naturaleza, y en este sentido se mantienen no recíprocas.

Por último, queda claro que en este caso particular, no hay error proveniente de la abstracción reflexionante: el esquema de apuntar hacia el objetivo de frente y lo más cerca posible es valedero en su dominio, y si se lo aplica erróneamente a las balas suspendidas por una cuerda, es ese un error

de aplicación y no un defecto de estructura. Cuando en física (¡y en psicofísica!) se invoca una ley logarítmica en situaciones donde un análisis más a fondo sugiere una exponencial, eso no quiebra para nada la solidez de estos esquemas métricos, mientras que su aplicación correcta o incorrecta depende solo del examen de los hechos, o sea, de la abstracción empírica.

§ 2 | EL ESTADIO II. — Este estadio, que se extiende de los 7 a los 10 años, está marcado por dos tipos de progresos cuyas relaciones se trata ahora de encontrar. Por un lado, se comprueba un conjunto de lecturas de los hechos con más matices que en el estadio anterior; el sujeto tiene en cuenta el grado de los errores y utiliza las informaciones para mejorar los intentos siguientes: hay un progreso notable en las abstracciones empíricas. Pero, por otra parte, como consecuencia de estas observaciones más correctas, o, por el contrario con el carácter de hilos conductores que las hacen posibles, se destaca la formación de nuevas coordinaciones agrupadas alrededor de la idea central de balanceo. Ahora bien: el balanceo es conocido desde los estadios sensomotores anteriores al lenguaje (reacciones frente a los objetos suspendidos); pero, como se ha visto, no se lo invoca en absoluto en el estadio I (incluso en IB, a pesar del descubrimiento del gancho), como si una bala suspendida desempeñase su papel de bala independiente de esa fijación, concebida como algo que molesta. Se presenta entonces un problema referido a la aparición, en este estadio II, de nuevas interpretaciones que implican seguramente un componente de abstracción reflexionante en la organización espacial del modelo adoptado.

Conviene primero señalar la existencia de casos intermedios entre los niveles IB y IIA, donde las comprobaciones empíricas prevalecen ampliamente sobre las coordinaciones inferenciales:

LAN (6;0) no hace todavía ninguna alusión al balanceo, pero testimonia en seguida un progreso en las comprobaciones, lo que conduce rápidamente a colocar un bolo frente a sí: "*Está muy de costado* (lo desplaza hacia el frente: acierta). *¡Así anda bien!*" O bien él es quien se desplaza frente a las nuevas posiciones del bolo sin aferrarse a las posiciones que había ocupado antes con éxito. Por lo tanto, alcanza la ley del paso ordinario de la bala por el centro (entrevista por Arn pero sin generalización), lo cual excede al estadio I. Respecto del problema de las alturas, llega a comprobar, en función de los hechos observados, que cerca del centro la bala toca "*abajo*" y más hacia afuera "*arriba*", pero sin poder decir por qué.

HEN (6;10) anuncia, por el contrario, desde el comienzo: "*Se va a balancear.* — ¿Hasta dónde? — *Por el suelo.* — ¿Adónde? — *Allá* (cerca del centro). — ¿Cómo lo sabes? — *¡El hilo!*" Sin embargo, esta rotación del hilo en principio vale solo para la mitad del trayecto, y necesita de un ensayo de trayecto con la mano para comprender que la bala "*sube*" del otro lado. Reconoce, como Lan, el paso ordinario por el centro (lo que no quiere decir todavía necesario); de ahí los desplazamientos acertados, ya sea del bolo o del sujeto. Pero para las alturas, cuando la bala pasa por encima del objetivo, "*hay que bajar la cuerda, se la puede bajar* (se desplaza "*más cerca*" del bolo). *Así no va, hay que alargar la cuerda.* — ¿Y si no se puede? — (Hay que poner el objetivo) *más cerca de la llegada de la bala* (lo hace). *Así tampoco va bien. Hay que ponerla un poco más lejos* (= cerca del centro: logra el objetivo)". Se ve que, invocando un "balanceo", Hen actúa en la práctica como Lan.

XAN (9;8) a pesar de su edad, todavía prevé al comienzo una trayectoria horizontal, y sólo al final llega a decir: "(la bala) *baja aquí* (hacia el centro) *y sube por allá.*"

Los casos claros del nivel IIA revelan entonces tres novedades: 1) la previsión de un balanceo completo y no parcial (como Hen); 2) la previsión —pero sin deducción necesaria a partir del balanceo— de que el choque de la bala será más bajo cuando el bolo se acerque al centro y más alto cuando esté "más lejos"; 3) la designación del "medio" como el más bajo (pero sin que constituya todavía un punto de paso necesario para todas las balas ni, por tanto, su punto necesario de crecimiento). Este problema 3) no se le planteó a todos los sujetos.

CAR (7;5) está aún cerca de los casos intermedios precedentes, pero después de haber recorrido con el hilo tendido una parte del círculo, con la bala en la mano, y, por tanto, a la misma altura concluye de ello que los bolos dispuestos sobre ese arco serán todos un poco demasiado bajos para ser alcanzados en su cima: "*No se los puede tocar...*" Propone entonces un alargamiento del hilo; después descubre, en cuatro bolos dispuestos a diferentes distancias del centro, que el más alejado será tocado "*más arriba*", y el más cercano al centro "*más abajo*". Después, para ubicar los bolos pequeños, llega a situarlos correctamente entre el centro y la línea de los grandes. "¿Los tocará arriba? — *Sí* (prueba con uno, pero encuentra que es golpeado muy abajo). *No* (los pone entonces del otro lado de los grandes, pero ella misma advierte el error). — ¿Quieres probar? — *Creo que va a rozar a los pequeños, porque hay grandes adelante.*" Para dos balas: cruce, pero "*más lejos*" (que el centro: en el final del trayecto de la suya).

BUC (7;3) indica correctamente con una bala libre el trayecto del balanceo de la bala atada: "¿Hay sitios donde se pase cerca del suelo? — *Sí, allá* (cerca del centro)." Las posiciones elegidas están frente a los bolos cuando se los desplaza. Se entregan cuatro: "Ponlos de modo tal que sean tocados justo en la cabeza." (Los dispone primero muy juntos en línea, después en cuadrado pero mal centrado, y prevé correctamente cuál será tocado "*más abajo*", que otro será alcanzado "*un poco más abajo*" y un tercero "*como aquél*".) Pero para obtener la igualdad recurre de todos modos a un alineamiento rectilíneo con espacios amplios. Por el contrario, ubica convenientemente los bolos pequeños delante de los grandes "*porque vuelve a subir*".

STE (8;5) mira el gancho cuando se pone frente a los bolos que debe alcanzar. Para tocar varios de ellos a la misma altura los dispone en triángulo en relación con el centro, pero a distancias desiguales; después tiene la idea de un arco de círculo, pero lo pone en posición inversa: "¿Qué dará? — *La mitad de un redondel.*" Cuando prueba, advierte el error, lo sustituye por una recta y finalmente "*un redondel*", pero centrado de modo demasiado aproximativo para hablar de lugar geométrico.

DUB (8;10): la bala está "*atada a la cuerda*" y "*va a salir del otro lado.* — ¿Y allá (centro)? — *Estará casi en el suelo.* — ¿Y allá abajo (el otro extremo)? (Indica una altura de alrededor de 1,50 m.) — Entonces, ¿cómo volverá? — *Balanceándose*". Para resolver el problema de las alturas, comienza por desplazamientos laterales; después, volviendo a ponerse frente al bolo, lo alcanza: "¿Y para tocarlo más abajo? — *Hay que acercarlo* (al centro). — Y para tocarlo todavía más abajo? — *Acercarlo más.* — Etecétera. ¿Y (así) dónde va a pegar? — *Más abajo.* — ¿Por qué? — *Porque no está siempre en el mismo sitio.*" Las sucesivas preguntas muestran que para los desplazamientos grandes está segura de sus previsiones, pero no para los pequeños.

"¿Y dónde se detendrá la bala? — *Allá* (en el medio)." Cruce de dos balas: también "*en el medio*".

CAL (8;8) muestra con la mano el balanceo; después apunta al frente tomando como referencia al gancho. Para varios bolos, prevé que será tocado más abajo el que está más cerca del centro, pero de todos modos pone cuatro bolos sobre la tangente al punto que está frente a él. Por el contrario, para alcanzar el punto donde la bala pasa más abajo, propone una medida: "*Se toma la distancia desde allá* (punto de partida) *hasta el bolo* (del frente) *y se busca dónde puede estar la mitad.*" Pero en el caso del cruce de dos balas prevé un punto que, aunque un poco alejado, es diferente.

FEV (8;6) anuncia los niveles superiores mediante sus ensayos de representación ¡pero en su caso con un mínimo de control empírico! Para alcanzar las alturas deseadas quiere primero que se alargue la cuerda, después propone poner cuatro bolos sobre la tangente en el punto frente a él: "*Así no va. Creo que ya sé: está demasiado lejos.*" Los ubica entonces sobre la circunferencia. "¿Y si tuviéramos muchos bolos?" Muestra un arco de círculo; después dibuja un círculo un poco descentrado y, por último, imita todo el trayecto de la bala haciendo un largo balanceo con el brazo: cuando considera la altura conveniente pone el bolo y vuelve a comenzar del otro lado mirando primero cómo apuntaría si realmente lanzara la bala. "¿Qué camino hace en el suelo? — *Así* (arco de círculo). — ¿Y si debes poner los bolos pequeños?" Toma un palo como si estuviera midiendo y lo pone entre cada bolo grande correspondiente y por adentro: llega primero a un alineamiento rectilíneo de los bolos pequeños, después los pone también en arco de círculo. "¿Está bien? — *Creo que así va a andar*", pero, en lugar de hacer la experiencia, vuelve a imitar el movimiento de la bala manteniendo la mano demasiado baja. Sólo entonces decide probar con la bala: "*No tocó la cabeza.* — La bala así, ¿nos puede ayudar?" Ante esta sugerencia, usa finalmente la bala en el extremo del hilo suspendido como si estuviera midiendo, lo que no le impide poner después el bolo tan lejos que resulta inaccesible, e intentar no obstante, alcanzarlo soltando la bala.

Las reacciones del nivel IIB, de 9-10 años, comienzan con los mismos tanteos y errores que en IIA, lo que muestra la continuidad del estadio. Pero en ese subestadio superior dos progresos correlativos prolongan los que hemos señalado al abordar este parágrafo y que comienzan con el nivel IIA. Desde el punto de vista de la lectura de los hechos los resultados verificados son mejor retenidos y generalizados, y, sobre todo, el sujeto llega a utilizar a veces espontáneamente la bala que tiene en la mano en el extremo del hilo suspendido para resolver las cuestiones de altura. Cuando se le sugiere eso, retiene este método con el carácter de control probatorio, mientras que en el nivel IIA no saca ninguna consecuencia necesaria (cf. Fev). Desde el punto de vista de las coordinaciones inferenciales, la trayectoria con "balanceo" adquiere un sentido más preciso, con una representación que se acerca a un arco asimétrico de curva, pero todavía no a un arco de círculo; de ahí la importancia que, según se acaba de ver, se atribuye al control mediante la bala en la punta del hilo, y también el papel esencial atribuido al "medio", que no es sólo el punto más bajo, sino el lugar de paso necesario (y no simplemente ordinario) de los trayectos y el punto de cruce de dos balas soltadas simultáneamente (pero a suficiente distancia, pues si están demasiado cercanas el sujeto las cree paralelas):

OLI (9;6): la bala irá "*derecho, pero bajará y subirá*" (muestra con la mano). Puntería hacia el frente. Para las alturas comienza alineando los bolos sobre la tangente, pero enseguida verifica sin sugerencia, con la bala en la mano en el extremo del hilo suspendido: entonces corrige su disposición y los pone "*inclinados en rueda*", es decir, en arco de círculo. Ante el problema de saber si en orden rectilíneo saldría bien, responde que no sabe porque no lo probó. "¿Podrías ponerlos en otros lugares?" — (Nuevo alineamiento sobre una sola tangente, pero con la misma verificación inmediata y espontánea.) — ¿Y si pusieras muchos? — *Se formaría un redondel* (sobre el plano horizontal, y tiende a demostrarlo con nuevos traslados teniendo la bala en la mano). Si se pusieran todos los caminos juntos, ¿qué daría? — *Como las ruedas* (aún no está la idea de concavidad)."

REV (10;0) prevé el balanceo: "*Desciende hasta aquí, después vuelve a subir más o menos como descendió.* — ¿Dónde está más cerca del suelo? — *Aquí* (correcto). — ¿Qué dibujo da? — *Una curva.*" Posiciones correctas y para tocar sólo la cabeza, pone más atrás los bolos teniendo en la mano la bala en el extremo del hilo, pero la usa únicamente para determinar con precisión las direcciones sin tener idea de hacer una medición para la altura: los bolos están, por tanto, alineados sobre una tangente, y poco a poco (después de probar) se los modifica logrando "*una curva*". Se le sugiere entonces que se sirva de la bala y del hilo para evaluar asimismo las alturas, con lo que rápidamente acierta. Después de una interrupción se le pide que ubique los bolos pequeños: en seguida los pone adentro del círculo de los grandes y mide con la bala y el hilo: eso dará "*un redondel también con uno que estará en el medio.* — ¿En el medio de qué redondel? — *Del grande.* — ¿Y luego para el pequeño? — *También en el mismo medio.* — ¿Seguro? — *Si no estuvieran los pequeños, habría un* (solo) *centro. Pero los pequeños están puestos delante de los grandes, entonces es* (también) *el centro de los pequeños*": por lo tanto, la noción de los dos círculos concéntricos, pero hace formas un poco irregulares.

Antes de intentar una interpretación de estos hechos, comparémoslos con los del estadio III.

§ 3 | EL ESTADIO III y CONCLUSIONES.

— Los dos progresos marcados por este último nivel son de dos tipos. Está por un lado, la inferencia de que el balanceo mismo describe necesariamente un arco de círculo y no una curva cualquiera: en el nivel IIB, los círculos solo son invocados en el plano horizontal para representar la distribución de los bolos del mismo tamaño y de igual altura, mientras que el arco de círculo que representa el balanceo se inscribe en los planos verticales. En segundo lugar, y como consecuencia, el conjunto de estos arcos de círculo en forma vertical constituye una concavidad hemisférica y no simplemente una red de "giros", como lo decía Oli:

SAB (12;1) se sitúa en un lugar intermedio entre los niveles IIB y III: aún no traduce explícitamente el balaceo en arco de círculo y, en el caso de los bolos que se deben tocar a la misma altura, se contenta primero con arcos concéntricos situados en línea horizontal de un mismo lado del punto medio; después dibuja tres círculos, pero no concéntricos, y sólo al final llega a incluirlos unos en otros, aun en profundidad, lo que sugiere un modelo de concavidad. En cambio. para soltar las dos balas en cualquier posición, prevé un encuentro "*en el centro*; *las balas se tocan en el*

centro", pero con la condición de contar "uno, dos, tres" para soltarlas simultáneamente, mientras que si las suelta una frente a otra "*no hay que contar*" porque se cruzarán necesariamente.

ODI (11;5) dice claramente del balanceo que "*la dirección es derecha, pero la bala misma hace un arco de círculo*" y "*pasa siempre por el medio*". "Y si se dibujasen todas estas rectas que forman un arco de círculo, ¿qué se obtendría? — *Una cubeta* (gestos que indican concavidad)." La única laguna en su representación es que la concavidad corresponde a los lanzamientos, mientras que al lanzar la bala (en elipses) "no tocará siempre" el fondo de la cubeta.

BON (11;7) describe el balanceo, visto lateralmente, como "*un arco de cuerda*", pero visto por encima "*va siempre derecho*", y para apuntar "*si se sabe dónde está el centro se sabe dónde ir más a la derecha o más a la izquierda*". En cuanto a la determinación de la altura en que un bolo es tocado o no, Bon invoca inmediatamente la longitud del radio (¡y en términos no escolares!): "*Hay que medir la distancia de la cuerda desde la bala al gancho.* — ¿Y si se quisieran describir los caminos que hace la bala, ¿qué es lo que formarían? — *Una estrella.* — ¿Plana? — *No, hundida hacia abajo* (gesto de una concavidad). — ¿Y si se tuviera un montón de brazos de estrellas? — *Formaría un plato si se tocan.* — ¿Plano? — *No, hondo.*" Bon admite también que lanzando la bala en elipses ese "óvalo" toca siempre el plato como los arcos: "*Sí, está en el fondo del plato.*"

La claridad de estas representaciones geométricas, como también su carácter tardío, nos conduce al problema del comienzo del § 2: ¿son estas representaciones el producto de una serie acumulativa de abstracciones empíricas a partir de los rasgos observables o dependen de abstracciones reflexionantes extraídas de coordinaciones del sujeto y que proporcionan a las abstracciones empíricas los marcos asimilatorios que necesitan para sus lecturas? La larga historia del balanceo, cuyos orígenes están en las reacciones sensomotrices ante los objetos suspendidos o en ciertos movimientos corporales (de los brazos, etc.), pasando después por las hamacas y el sube y baja para llegar, sólo a los 11 - 12 años a la noción clara de un arco de círculo con centro fijo y radio de longitud constante, revela suficientemente el carácter efectivo del problema. En efecto, si sólo se tratara de comprobaciones empíricas sería fácil para el sujeto ver mucho más rápido que la cuerda que tiene la bala está atada a un gancho inmóvil, que esta cuerda no cambia de longitud y que la bala no sigue una trayectoria horizontal, porque puede alcanzar a los bolos: uniéndolos simplemente unos a otros con el centro fijo, con la cuerda de longitud invariable y esa curvatura, obtendría así un arco de círculo de radio constante, sin tener que teorizar ni describirlo en términos verbales seleccionados. Ahora bien, el sujeto descubre el gancho fijo y la longitud de la cuerda desde el nivel IB, pero la curvatura solo es percibida en el estadio II, primero bajo la forma poco regular de un balanceo cualquiera, después bajo la forma de un arco simétrico (en IIB), y, por último, solamente en el estadio III bajo la forma de un arco de círculo propiamente dicho; de ahí la tardía solución a los problemas de altura y la representación de concavidad. La razón de estos retrasos es, pues, con toda evidencia, que el centro fijo, la longitud y la cuerda y la curvatura no fueron puestos en relación; dicho de otro modo, los desplazamientos de

la cuerda no se concibieron como la rotación de un radio a partir de ese centro, que impone a la bala un trayecto que en el plano vertical, consiste en una porción de circunferencia. En una palabra, para leer los rasgos observables por abstracción empírica sería necesario un modelo, en este caso geométrico; ahora bien, como de costumbre, la construcción de un modelo así supone la intervención de cierta cantidad de abstracciones reflexionantes, bien o mal diferenciadas de las abstracciones empíricas y que cumplen, respecto de ellas, una función estructurante, estén o no acompañadas de reciprocidad: se trata ahora de describir su construcción laboriosa, precisando sus relaciones con las abstracciones físicas.

1) Desde este último punto de vista, recordemos en primer lugar la dualidad pero también la estrecha conexión que existe entre la geometría del objeto y la del sujeto. La segunda es de naturaleza operativa en general (acciones y su coordinación, que conducen a desplazar o a modificar los objetos) y después específicamente operatoria (transformaciones cuantificables con sus invariantes). La primera, por el contrario, es esencialmente figurativa y cualitativa: percepción y representación de las formas, de los estados iniciales y finales de las transformaciones, o incluso de éstas, pero a título de cambios cualitativos no cuantificados en tanto no hay intervención del sujeto. Este puede naturalmente aplicar su propia geometría operatoria al espacio de los objetos, por una adecuación cada vez más precisa de la métrica a los rasgos observables figurativos; de ahí la geometría física cuya importancia creciente ha demostrado el pensamiento científico. En nuestro pequeño problema de la bala suspendida, es la necesidad de tal medición del balanceo lo que exige una sucesión de abstracciones reflexionantes y explica el carácter tardío de las soluciones finales.

2) La idea del balanceo solo aparece en el nivel IIA porque en el estadio I el sujeto se esfuerza por utilizar la bala como si estuviera suelta. Este balanceo, todavía global y figurativo o cualitativo, se extrae no obstante de las acciones y coordinaciones anteriores, como esquema de "hacer balancear", mientras que, una vez llegado a la mente del sujeto, este esquema concuerda naturalmente con los datos empíricos proporcionados por el dispositivo. En cuanto al esquema mismo, implica algunas coordinaciones de acciones, pero indisociables de sus resultados empíricamente comprobados, de tal modo que en esta aplicación del esquema en los comienzos del subestadio IIA, la parte de abstracción reflexionante permanece aún débil y la de abstracción empírica es considerable. De tal modo el balanceo, propio del nivel IIA, permanece desprovisto de toda cuantificación: consiste en el descenso inicial de la bala y un ascenso después del centro (lo que permite prever que los bolos serán tocados más abajo hacia el centro), pero según arcos que varían a la vez en longitud y en curvatura: prueba de ello es que para alcanzar varios bolos de igual altura, todos los sujetos de ese nivel ubican en un momento dado los bolos en una disposición lineal (sobre una tangente, etc.), o también en cuadrados y triángulos no centrados en el medio, lo que supone, evidentemente, al lanzarse la bala frente al bolo apuntado, trayectos de longitudes y curvaturas desiguales. Otra prueba es que

tener con la mano la bala en el extremo del hilo suspendido no parece algo convincente a estos sujetos, que están lejos de representarse la cuerda como el radio de longitud constante de una porción de circunferencia. Sin embargo, procuran darse un modelo representativo, como lo muestra el caso de Fev, que imita los trayectos de la bala y considera estas imitaciones como más instructivas que los propios ensayos materiales: pero este modelo permanece ajeno a toda cuantificación.

3) El nivel IIB marca un progreso notable en el sentido de la abstracción reflexionante: del esquema operativo (pero todavía no operatorio) de un balanceo cualquiera, se extrae el modelo de un balanceo de curvatura simétrica, como lo muestra la fórmula de Rey ("sube más o menos como ha descendido") pero sobre todo se deduce la utilización, como medida, de la bala en el extremo del hilo suspendido y el hecho de que para alcanzar varios bolos de la misma altura el sujeto renuncia rápidamente a alinearlos y los ubica en arcos de círculo o en redondeles, incluso concéntricos. Se podrá decir que es el resultado de simples comprobaciones, o sea, de abstracciones empíricas: pero sería necesario primero sistemáticamente, lo que supone un método (hilo suspendido), y después se requeriría un esfuerzo de representación de la curvatura propia del balanceo, y, desde el momento en que se da la construcción de un modelo tiende naturalmente, por razones de cuantificación implícita, a tomar forma simétrica. Pero lo notable en este nivel IIB es no solo este progreso en el sentido de la cuantificación (utilización de la bala en el extremo del hilo suspendido mientras este conlleva una longitud constante y la construcción de arcos y de círculos en el plano horizontal), sino también la limitación de una cuantificación así. En efecto, los sujetos de este nivel aún no perciben que los arcos o los redondeles que construyen en el plano horizontal como lugares geométricos de una misma altura de golpe (y Rey agrega círculos concéntricos con precisiones explícitas acerca de su "centro" común) implican en lo vertical que la curvatura propia del balanceo constituye ella misma un arco de círculo con radio constante. La razón de esta limitación es, por lo demás, clara: de lo que el sujeto primero toma conciencia es del resultado de esas operaciones, o sea, los arcos y círculos en el plano horizontal, mientras que la operación misma en tanto transformación, o sea, la rotación de un radio constante que describe en su extremo un arco de círculo propiamente dicho, escapa aún de la atención del sujeto.

4) Con el estadio III, finalmente, se impone esta última abstracción reflexionante: la cuerda suspendida se transforma en un radio invariante, su rotación engendra un arco de círculo y la suma de los arcos constituye una concavidad. Resultado tardío, pero se comprende ahora por qué: cada etapa de la abstracción reflexionante conlleva una nueva construcción, en el sentido de las constancias y de la cuantificación de las transformaciones, pues el "reflejamiento" de la acción en operaciones conduce a una "reflexión" reorganizadora que exige estas cuantificaciones.

5) Respecto de los problemas planteados en la introducción de este capítulo, es evidente que esas abstracciones reflexionantes sucesivas nunca son puras, porque están constantemente sometidas al control de los hechos que procede de la abstracción empírica, sino que su desarrollo, desde un nivel al siguiente, marca una diferenciación progresiva entre los dos tipos de abstracciones: entre el simple esquema del balanceo —donde predomina la abstracción empírica— y las nociones de arco de círculo en vertical y de concavidad propias del estadio III —cuyo control no es más que inferencial e indirecto—, la diferencia es sorprendente. En segundo lugar, parece claro que en todos los niveles la abstracción reflexionante es estructurante, mientras que la abstracción empírica se limita a proporcionar los datos, es decir a servir de control o a suscitar problemas, lo que, por cierto, es doblemente indispensable, pero aún no aparece como fuente de solución. Por último, se comprueba que hasta el estadio III las abstracciones reflexionantes permanecen incompletas: proporcionan en primer lugar el esquema del balanceo, pero sin precisión respecto de la curvatura; después, un arco de curva simétrico pero aún no circular y, por último, el arco de círculo: ahora bien, el carácter de incompleto no es un error, y cuando hay error (como ya se ha visto al final del § 1) se relaciona con una aplicación abusiva, sin poner en cuestión el hecho de que en su campo restringido de aplicación la abstracción en juego sigue siendo válida.

Las diagonales

EN COLABORACIÓN CON M. LAVALLÉE Y M. SOLÉ-SUGRANES

Dados dos dispositivos que permiten trazar horizontales y verticales, los problemas consisten en primer lugar en establecer cómo llega el sujeto a disponerlos para obtener líneas oblicuas en diferentes direcciones, o también líneas curvas, y, después, en analizar las comparaciones que el sujeto establezca entre las dos situaciones.

En relación con la situación I se utilizaron sucesivamente dos técnicas. La primera consiste en fijar un lápiz en un cubo de acero que puede ser desplazado mediante cuatro alambres dispuestos en forma de cruz (+): tirando de uno o de otro se obtiene un trazo horizontal hacia la derecha, horizontal hacia la izquierda, o vertical hacia arriba o hacia abajo. Estos hilos semejan, en sus extremos, colas de ratones y son reconocibles por sus diferentes colores, lo que facilita la conversación con los jóvenes. Tirando de un solo ratón, obtienen una línea horizontal o vertical, y desplazando dos a la vez trazan una línea oblicua.

Para un segundo grupo de sujetos, se reemplaza la situación I por dos reglas T de dibujante de plástico transparente ubicadas perpendicularmente en los lados inferior e izquierdo de una hoja de dibujo (de donde surge de nuevo una cruz +) y que permiten así trazar, por medio de un lápiz fijado a su intersección (cada regla tiene una hendidura), las mismas horizontales, verticales y oblicuas que se obtienen con el dispositivo precedente.

En cuanto a la situación II, está constituida por una pizarra que en el comercio se llama "mágica", es decir de mecanismo oculto. La parte visible consiste en una pantalla y dos botones: uno (*H*), vuelto hacia la derecha, traza una horizontal en ese sentido y en sentido inverso si se la gira hacia la izquierda; el otro (*V*) da trazos verticales orientados hacia arriba o hacia abajo según se lo haga girar hacia uno u otro lado, y mediante la acción simultánea de los dos botones se trazan líneas oblicuas.

Una vez explicados y manipulados los dispositivos, se le propone al niño diversas figuras como modelos para reproducir en I y en II, algunas simples (| o □), otras para componer de diversas maneras (/ o ⋁⋀⋁, etc., que llamaremos "zigzags" o abanicos). Una vez terminadas las dos partes de la experiencia se pide la comparación entre I y II.

§ 1 | EL ESTADIO I. — Los sujetos de un primer nivel (5-6 años) no llegan por sí mismos a obtener las oblicuas, y cuando se les sugiere el empleo de dos movimientos simultáneos, los utilizan sin comprender y no llegan a generalizaciones estables:

GEN (5;3). Situación I (las *T*) se ejercita en horizontales y verticales y resuelve sin dificultad el cuadrado. En cuanto a las oblicuas, cuenta con obtenerlas con una sola *T* y las utiliza por turno varias veces asombrándose del fracaso: "¿Quieres que te ayude? — *Sí.* — (Ejecución.) — *Es porque se hicieron las dos*", y ella reproduce la maniobra. Pero una oblicua descendiente utiliza solo una *T* y obtiene una vertical: "¿Qué se hizo para subir? — *Las dos.* — Y para descender, ¿qué se debió hacer? — *Las dos.*" Se le ayuda de nuevo, después se le hace resumir: "*moví las dos*", y logra de nuevo /, pero, para\, emplea bien las dos T; sin embargo llega de nuevo a una subida. No logra el abanico ni los zigzags. Situación II: afirma tener una pizarra así en su casa, y efectivamente logra rápido la línea oblicua ascendente, pero no la descendente. Comparación: "¿Te parece que los dos juegos se asemejan? — *No.* — ¿Por qué? — *Allá había una casa y acá* (*T*) *un cuadrado y montañas.* — Pero aparte de los dibujos, ¿hay otra cosa parecida? — *No.* — ¿Es completamente diferente? — *Sí, Allá* (las *T*), *es de madera y se ponen hojas. Aquí* (II) *no es semejante.*" En cuanto a las acciones, "*allá se hace así* (se deslizan las T) *y acá se dan vuelta los botones*".

NAT (6; 1). Situación II en primer lugar: Nat hace trazos hacia la izquierda y hacia la derecha, sin modelos; después hace trazos verticales. "¿Y si se hacen girar los dos botones al mismo tiempo? — *Sí.* Prueba: *¡Se va de costado!* — ¿Cómo diste vuelta? — *Al costado* (recomienza pero gira en el otro sentido). *¡Ah, no, va* (oblicuamente) *hacia arriba!*" Después de esta iniciación, se le dan modelos simples, que logra realizar, y a continuación las oblicuas: "*Así yo giro inclinado* (pero toma solo un botón por vez y fracasa. Lo mismo varias veces). — Ahora, ¿cómo hiciste? — (Toma los dos botones y logra una oblicua.) *Los dos así.*" Pero en sentido inverso no toma más de un botón. Etcétera. Situación I (el cubo): nueva iniciación y otra vez falta de repetición para las oblicuas. Comparación: "En los dos juegos, ¿hay cosas que se parecen? — *No.* — ¿Qué es lo que hiciste? — *Dibujos, y allá* (cubo) *hacía dibujos también, hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia la derecha.* — ¿Y los trazos (diagonales)? — *Inclinados.* — ¿Cómo lo hacías? — *Hacía girar los dos botones.* — Y con el ratón, ¿se lograron líneas inclinadas? — *No* (Las olvida). — ¿Y así (se las muestra)? — *Sí.* — ¿Cómo lo lograste? — *Tiré de a una.* — ¿Eso te hace pensar en algún parecido con la pizarra? — *No.*"

El hecho de que estos sujetos de 5-6 años (y *a fortiori* los de 4 años que fueron examinados) no lleguen a encontrar por sí mismos el modo de construir las diagonales componiendo simultáneamente las direcciones verticales y horizontales no tiene nada de asombroso. Pero el hecho de que, después de ver cómo se debe hacer, no puedan invertir la orientación como lo hacen para las líneas simples o, sobre todo, no tomen más que una *T* o un botón es algo que ofrece más interés. Lo más curioso, empero, es que de esas manipulaciones, que visiblemente interesan a estos niños, no extraen, en el momento de la comparación, ningún elemento común respecto de las acciones mismas: como sucede comúnmente, las reacciones de este nivel se centran en las diferencias de contenidos (material utilizado o resultado de las acciones) y no en las acciones mismas, en su forma o esquema generalizante.

Pero, en el caso particular, se agrega que, cuando se intenta que el sujeto recuerde esas acciones como tales, o bien aún ve únicamente diferencias (como Gen: deslizar las *T* o dar vuelta los botones), o bien ve, como Nat, una analogía muy general ("hacer los dibujos"), pero recordando el modo de hacer las diagonales con la pizarra y olvidando de modo sorprendente el procedimiento con los ratones o con las *T*, aunque son idénticos al primero. La explicación probable es que, si bien resulta comprensible que haciendo desplazar un lápiz (*T* y ratón) o incluso haciendo girar un botón en una máquina "hecha para" actuar así, se obtengan trazos simples, la composición de dos direcciones para determinar una tercera queda en este nivel en completo misterio: utilizado como simple receta práctica, el procedimiento de los dos operadores simultáneos no da lugar entonces a ninguna abstracción reflexionante en la generalización de las acciones ni, *a fortiori*, reflexionada en las comparaciones retroactivas.

§ 2 | EL NIVEL IIA. — A los 7-8 años (y a veces desde los 6 1/2) se sitúa un segundo nivel, en el que el sujeto descubre por sí mismo la composición de las verticales y las horizontales en diagonales (o la comprende y la generaliza cuando se le muestra el procedimiento), y llega parcialmente y por tanteos (sin estabilidad final) a variar las inclinaciones dosificando (en más y en menos) el valor de los componentes:

MAN (6;7). Situación I (con las *T*): comienza por manipulaciones separadas y realiza trazos verticales u horizontales; después ella misma decide dibujar una "*casita*". — ¿Por dónde comienzas? — *Por el techo.* — ¿Cómo puedes hacerlo? — *Quizás haciendo las dos al mismo tiempo* (prueba: diagonal no muy rectilínea). — ¿Quién te dió esa idea? — *Nadie... ¡es así!* (Vuelve a comenzar y lo logra mejor.) *Deseo bajar* (el otro costado del techo, pero simplemente invierte los movimientos y obtiene / en lugar de \ ); *así no es: da vuelta hacia atrás* (nuevos intentos, siempre similares). *Estoy por pensar que así va a andar. Cuando subo allá* (con la *V*) *da una idea para descender allá* (*H* pero del lado correcto: acierta) — ¿Cómo hiciste para subir? — *Empujé así* (*V*) *hacia arriba y así* (*H*) *así, hacia la derecha.* — ¿Y para descender? — *Se baja este* (*V*) *y aquel* (*H*) *así, hacia la derecha* (hacia la derecha y ya no hacia la izquierda, como en la inversión)". Logra los zigzags. En cuanto al abanico, "*primero voy a subir aquel* (*V*) *y después voy a hacer las dos al mismo tiempo*": resultan tres oblicuas internas paralelas y no divergentes. Una cúpula redonda: "*No tengo ninguna idea de cómo hacer eso* (yuxtapone líneas oblicuas en un polígono)." Situación II: las mismas realizaciones hallando ella sola la diagonal. Comparación: "¿Hay cosas similares? — *Sí; es casi similar porque se tuvieron que hacer rayas así* (verticales, horizontales y en diagonal). — ¿Y el modo de hacerlas era similar? — *No, porque allá* (I) *hubo que moverlas, y acá* (II) *se debe hacer girar el botón.* — Y para hacer los techos de la casa, ¿se hacían cosas con los dos o no? — *Sí, porque hubo que subir así y después hubo que bajar* (indica las combinaciones). — Al hacer, ¿era lo mismo? — *No, acá debo hacer girar los botones, y allá mover.*"

LUP (7;2). Situación I (cubos). En el curso de las pruebas preliminares traza líneas simples tirando cada ratón por separado y pone en cuestión que puedan desplazarse dos a la vez y, con más razón, cuatro a la vez, pero agrega: "*¡Ah! Eso me da una idea*" y desplaza dos hacia el ángulo derecho, para reunirlos después en la diagonal. Se le recuerda que los trayectos de los ratones solo pueden ser perpendiculares (+), pero señala que el cubo sigue la diagonal y lo generaliza para las otras

parejas de ratones. Cuando se pasa a la pizarra, cree primero que es imposible dibujar una línea oblicua; después: *Lo hice con dos ratones.* — ¿Eso no te da ninguna idea? — *¡Ah! quizás; tomo los dos botones* (prueba). *Si, así anda.*" Logra los zigzags pero por tanteos, comenzando por invertir simplemente su diagonal inicial. En el momento de las comparaciones ve las semejanzas: "*Aquí* (pizarra) *puedo ir también por todas partes* (+) *como los ratones*"; y a propósito de las diagonales: "*Hay que tirar de dos ratones, y eso se parece porque tomo dos botones.*"

AND (6;9) con las *T*, las hace funcionar separadamente: "Y si se toman dos *T* juntas, ¿piensas que eso dará algo o no? — *Una línea pequeña, un poco inclinada.* — ¿Será como tu línea? — (Hace avanzar las *T* una tras otra después muestra la media.) *Así.* — ¿Cómo? — *Inclinada* (diagonal)."

Al estudiar anteriormente los problemas de los vectores, ya habíamos comprobado que para dos fuerzas iguales que forman un ángulo la resultante es prevista desde el nivel IIA como siendo la media. Los sujetos precedentes nos muestran el nacimiento de esta idea. En Man se trata de un *insight* demasiado rápido para ser seguido; pero en Lup se ve que para conciliar dos trayectorias en el ángulo derecho hay que reunirlas sobre la diagonal, y And revela también el detalle de esta inferencia primero al suponer, que si una de las *T* actúa sobre otra la resultante solo puede ser una línea "inclinada", y después al trazar las dos rectas de 90° para estimar su acción recíproca; de ahí la conclusión que conduce a la mediana. Esta coordinación se traduce entonces en un comienzo de abstracción reflexionada, en el momento de las comparaciones, por el hecho de centrarse en acciones comunes, o sea, en la forma más que en el contenido aunque éste cumpla también una función.

§ 3 | LOS NIVELES IIB y III. — En los sujetos del nivel siguiente (9-10 años, con algunos casos desde los 8 1/2) se agrega a estas coordinaciones una nueva dimensión que consiste en dosificar en más y en menos, para la copia del abanico, aún no lograda en el nivel IIA, los componentes de la oblicua, es decir, en introducir una nueva operación sobre las precedentes, aunque prolongándolas:

MAR (8;8). Situación I con las *T*: se entretiene construyendo una serie de rectángulos incluidos unos dentro de otros (pero con continuidad, como en una guarda griega); después, para trazar una línea oblicua dice en seguida: "*Se podrían mover las dos al mismo tiempo*". Para los zigzags, comienza por una simple inversión de la diagonal; luego, "*una vez que se comprenda el sistema, andará bien*", y halla las direcciones. Para el abanico: "*Voy a tomar las dos reglas* (T). *Para hacer aquella* (una oblicua interior) *será un poco más difícil, porque habrá que subir menos: entonces arreglo todo, soy vivo, hago así más con aquel* (H) *y menos con este* (V)." Así logra el objetivo, pero, para trazar una arcada, "*no es posible con eso* (las T)", y construye un polígono con sucesivas líneas oblicuas. Con la pizarra encuentra enseguida la diagonal con los dos botones, pero fracasa también en la arcada. Comparación: "¿Hay algo parecido? — *Yo diría más bien que es casi lo mismo*"; y para las oblicuas, "*daba vuelta más derecho* (vertical) *que inclinado, y en el otro* (oblicua) *empujaba más acostado que levantado*".

CAT (9;7) en el caso de las *T* y la oblicua dice en seguida: *"Se mueven los dos juntos"*, y logra trazar los zigzags. Para el abanico: *"Allá* (la oblicua más inclinada) *hay que ir más hacia la derecha, acá* (la menos inclinada) *se va más hacia arriba."* Comparación: "¿Hay algún parecido? — *Sí, se pueden mover los dos al mismo tiempo; se puede subir y se puede ir también a la izquierda y a la derecha, como con el otro juego."*

Con el estadio III asistimos también a la intervención de una dimensión nueva, esto es, se incorpora a las precedentes una operación más: el sujeto llega a realizar la cúpula redonda o la arcada variando la velocidad de los movimientos, y no sólo su valor en + o en —, como para el abanico:

CLA (11;6). Con las *T* para los zigzags: *"Para el techo,* (= las oblicuas) *se mueven las dos al mismo tiempo.* — ¿Qué es lo que te ha hecho pensar así? — *El cuadrado* (que acaba de hacer) *tiene diagonales, y eso* (la mitad de los zigzags) *da un cuadrado."* Abanico: *"Subí más allá (V) y menos este (H) para esta línea,* etcétera. — ¿Y eso (la arcada) es posible? — *Sí, con los dos, voy a andar menos rápida con este (H) que con aquel (V) para hacer la curva."* Ensaya, y traza primero una sinusoide; después se corrige: *"No, las dos parten en un sentido diferente para volver a descender: han salido en ángulo recto y hay una que va más rápido que la otra. Primero voy despacio, después un poco más rápido con este (V); luego aceleré con el otro. Después hice lo contrario."* Comparación: lo que se parece es *"la dirección. Yo debía manejar del mismo modo las dos maderas y los dos botones... Si se quita la tapa de esto* (pizarra) *se verá lo mismo".*

TIA (11;10) para la arcada: *"Habría que intentar buscar un truco para hacer una curva.* — ¿Cómo piensas hacer? — *Al azar: allá* (una oblicua casi rectilínea que hizo antes) *ya se puede hacer una especie de curva... De todos modos no se hace de esa manera una recta* (con sus oblicuas), *entonces se invierte para volver, aquél (H) va un momento más rápido y después, cuando se llega al medio, eso cambia y es el otro el que va ligeramente más rápido. Y después se hace así exagerando* (la diferencia de velocidad)." Llega a trazar una sinusoide; después se corrige: *"¡Ah, sí! entonces pasa aquel (V) habría que invertir el sentido."*

MAN (12;11). Arcada: "¿Qué hay que controlar? — *La rapidez de las dos reglas... porque si se hacen al mismo tiempo* (= a la misma velocidad) *las dos dan una línea recta* (diagonal)."

Parece entonces que las dos novedades que caracterizan los niveles IIB y III no se deben a abstracciones empíricas. En el caso del más y del menos para el abanico, las variaciones no resultan de comprobaciones sino de inferencias previas. En cuanto a las velocidades, Tia podría hacer creer que parte de una observación (curvatura involuntaria de algunas de sus oblicuas) pero no es este hecho por sí mismo lo que conduce a esclarecerlo: es la razón que de ello él se da retroactivamente al suponer una diferencia voluntaria de velocidad. Se trata entonces de abstracciones reflexionantes; nos resta comprender el proceso.

§ 4 | CONCLUSION. — La sucesión de nuestros cuatro niveles proporciona un buen ejemplo de adquisiciones operatorias superpuestas. En el estadio I, el sujeto cuenta con la posibilidad de construir las rectas *V* de arriba hacia abajo o *H* de izquierda a derecha y de invertirlas, pero no puede

asimilar la de trazar oblicuas que se procura transmitirle. En el nivel IIA descubre por sí mismo la coordinación posible de los dos operadores, *V* y *H*, sin la cual no podría sobrepasar las dos direcciones iniciales. En el nivel IIB encuentra el medio de hacer variar *V* y *H* en más y en menos, sin lo cual no obtendría más que una sola inclinación (la diagonal). En el estadio III, por fin, llega a introducir un cambio gradual de las relaciones de velocidad, sin lo cual solo llegaría (como lo nota Man) a trayectos rectilíneos. Cada una de estas adquisiciones constituye una superación requerida por un problema nuevo, pero el problema consiste cada vez en completar las posibilidades precedentes en la dirección más próxima: de los trazos en + a las diagonales X, de estas a las inclinaciones variadas pero rectilíneas, y de estas a las curvas.

La solución hallada por el sujeto conduce cada vez a utilizar las coordinaciones de acciones anteriores, pero enriqueciéndolas con un elemento nuevo, y el problema para nosotros es comprender de dónde surge esta novedad. La hipótesis es que en cada caso se la extrae de lo que precede por abstracción reflexionante, pero que esta extracción es constructiva al mismo tiempo que abstractiva, por el hecho de que realiza o actualiza cada vez las posibilidades abiertas por la conducta inmediatamente anterior. En efecto: pasar de la utilización sucesiva de los operadores *V* y *H* a su coordinación *VH* (a la vez) consiste simplemente en utilizar la relación de sucesión en toda su extensión: *V* precede a *H*, o *H* precede a *V* o *V* y *H* son simultáneos, simultaneidad que constituye el caso límite donde "precede" y "sucede" asumen un valor nulo o, si se lo prefiere a este lenguaje, donde la relación de sucesión es anulada; de ahí las reacciones del nivel IIA en la cuales *V* y *H* son utilizadas conjuntamente. Cuando se da el caso, se abren entonces dos posibilidades. La más simple —y los sujetos del subestadio IIA se quedan allí— consiste en utilizar *V* y *H* con la misma intensidad. Pero introducir la igualdad consiste a su vez en abrir nuevas posibilidades, pues la relación $V = H$ no es más que un caso particular de $V \geqslant H$ o $H \geqslant V$, o aun, si se prefiere, puede ser anulada: de ahí las reacciones del nivel IIB, en las que el sujeto introduce diferencias entre *V* y *H*, en lo que concierne a su valor o intensidad (en + y en -). Pero una vez adquirido esto, se abre una nueva posibilidad. En efecto, introducir $V \gtreqless H$, es en realidad atribuirle velocidades diferentes, pero como velocidades constantes: ahora bien, la invariancia es un caso particular de la variación, cuando este se hace nula, o si se prefiere, cuando es negada; de ahí las reacciones del estadio III, en las que las diferentes velocidades de *V* y de *H* son consideradas como variables para realizar las curvas.

En una palabra, las novedades cuya formación comprobamos entre los estadios I y III consisten todas en una extensión de la relación utilizada precedentemente, o en su negación (operación inversa, que no constituye, de igual modo, sino una extensión). En una situación de este tipo el proceso de la abstracción reflexionante pierde lo esencial de su aparente misterio: por un lado, la relación en juego en cada caso es extraída de coordinaciones anteriores, y eso es comprensible; pero, por otra parte, se adquiere también la posibilidad de la negación o inversión ya desde el estadio I (bajo la forma preoperatoria de una reversibilidad de *V* hacia arriba o hacia abajo y de *H*

hacia la derecha o hacia la izquierda). La novedad debida a la abstracción reflexionante es aquí solamente una novedad de combinación o de coordinación, mientras que los elementos u operadores combinados son extraídos de lo que precede.

Pero la gran diferencia entre esos resultados y los del capítulo XII estriba en que aquí las combinaciones nuevas se construyen con motivo de un nuevo problema exterior, o sea, por la necesidad de una extensión de las posibilidades mientras que, en el caso de los rectángulos del capítulo XII, esas combinaciones son provocadas por las necesidades de los "reflejamientos" sucesivos (de la acción a la representación, de esta a los relatos, luego a las comparaciones retroactivas y después al pensamiento reflexivo). Pero en esta situación, los reflejamientos implican también una extensión del campo y un acrecentamiento de las posibilidades (hasta el descubrimiento de las "razones" de lo que hasta ese momento era solamente comprobado).

En los dos tipos de conductas, lo propio de la abstracción reflexionante es, pues, extraer de las coordinaciones precedentes las posibilidades nuevas abiertas por ellas y actualizarlas. Ahora bien, realizar las posibilidades no consiste en estar predeterminado por las estructuras preformadas, y ello por dos razones. La primera es que el conjunto de todas las posibilidades es una noción antinómica, e incluso contradictoria. La segunda es que en una sucesión de estadios I, II, III, etcétera, las actuaciones de I no "contienen" las posibilidades realizadas en III; se limitan a conducir hacia allí, pero mediante una condición necesaria: que las posibilidades abiertas en I estén en primer lugar actualizadas en II, pues es el estadio II y no el I el que abre las posibilidades utilizadas en III. En una palabra, sería un grave error representarse el mundo de las conductas reales o realizadas como si fuese lo único que está en movimiento mientras que el universo de las conductas posibles estaría acabado y, sería estático y contendría de antemano todas las actualizaciones realizables: también las posibilidades se construyen, y cada realización "abre" nuevas posibilidades que se agregan a las precedentes, pero que no pueden deducirse sino tardíamente, pues la necesidad sigue siendo el patrimonio de las realizaciones.

El desplazamiento del punto de referencia en un sistema de movimientos cíclicos

EN COLABORACIÓN CON E. ACKERMANN y N. COX

Se toma un vehículo suficientemente largo (un tanque, por ejemplo), provisto de una oruga, es decir de una cinta sinfín con divisiones (o eslabones) articuladas, una de las cuales está pintada de rojo para que sirva de punto de referencia: el problema es entonces considerar sus movimientos o posiciones momentáneamente inmóviles durante la marcha del tanque. Como problema isomorfo hemos utilizado cinco piedras alineadas, cuatro blancas y una roja: el sujeto debe desplazar cada vez la última de la serie para ponerla adelante, y se trata de determinar los movimientos y las posiciones de la piedra roja que sirve de referencia. Los movimientos en juego se emparentan con los cicloides, y ya hemos estudiado con B. Inhelder (*) la representación de esta curva mecánica. Se tratará, pues, de volver a considerar el problema pero extrayendo de él lo que resulta útil para el estudio de la abstracción.

El procedimiento utilizado comienza por el problema de las piedras. Nos imaginamos una isla separada de la orilla por una gran extensión de agua y a un hombre que la desea atravesar sin mojarse y dispone sólo de cinco piedras; de ahí los desplazamientos ya indicados. Pero se comienza por hacer que el niño desplace solo las tres últimas piedras, estando la roja primero adelante (*BBBBR*) y pasando después a ser la penúltima (*BRBBB*). De ahí las preguntas siguientes: ¿dónde estaba la roja antes? ¿Ha cambiado de lugar? (pregunta ambigua). Después, en relación con la mesa: ¿Se

(*) Piaget e Inhelder, *La géometrie spontanée de l'enfant* (P.U.F.).

ha movido? ¿Si se hubiese puesto sobre R una bandera (o una hormiga) ¿se habría movido en relación con la isla? De ser así, ¿habría avanzado o retrocedido? Después se pregunta por el camino que hace *R* si se continúan las permutaciones por un trecho bastante extenso, y se hace dibujar este camino que de hecho se acerca bastante a un cicloide.

Se pasa después al problema del tanque, cuya oruga está formada por una larga cinta sinfín de caucho provista de eslabones discontinuos y muy visibles, uno de los cuales, *R* está pintado de rojo y sirve de referencia. Primero se pide que se anticipe lo que sucederá con los trayectos o posiciones (inmóviles) de *R*, arriba, abajo o cuando pase sobre las ruedas. Después se pasa a las comprobaciones y finalmente a las reconstrucciones apoyadas en dibujos del sujeto. En algunos niños se ha estudiado el caso límite constituido por una sola rueda grande.

El interrogatorio incluye, por último, una comparación entre los dibujos de las piedras y los de la oruga para hacer precisar los elementos comunes y los distintos.

§ 1 | EL NIVEL IA. — Los sujetos del primer nivel, IA, creen en el desplazamiento del punto de referencia *R* cuando permanece inmóvil, y en el caso de las piedras, no ven contradicción al afirmar simultáneamente que la referencia retrocede, en un movimiento real, aunque alejándose de la isla para acercarse a la costa:

STE (4;6). Después del desplazamiento de los tres primeros cubos blancos: "¿Dónde estaba *R* antes? — *Ha cambiado de lugar.* — ¿Lo tocaste con tus dedos? — *Sí.* — ¿Cuáles se movieron? — *Todos.* — Si yo hubiera puesto una banderita sobre R, ¿ahora estaría más cerca de la isla? — *Sí, así* (gesto en dirección a la isla)." Se vuelve a comenzar poniendo sobre una mesa un segundo punto de referencia *R*' al lado de *R*: "¿Dónde estaba *R* antes? — *Aquí* (pone adelante las tres piedras blancas que ha desplazado). — ¿Pero era al lado de R', que ha sido puesto para ver? — *Se ha movido.* — ¿Cuál? ¿*R* o también *R*'? — ..." En el problema de la oruga, juega con el tanque y ya no escucha las preguntas.

COR (4;6). Durante las preguntas introductorias, el experimentador desplaza dos piedras y Cor pone las siguientes: "¿El hombre podría utilizar menos de cinco piedras? — *No.* — ¿Con dos no podría atravesar? — *No.* — ¿Cuántas se necesitan por lo menos? — *Cinco.*" Se pasa a la experiencia y Cor desplaza *3B*: "¿Dónde estaba antes *R*? — (Muestra el comienzo de la serie actual.) — ¿Y ahora? — *Está atrás.* — ¿Ha cambiado de lugar o no? — *Sí.* — Si hubiera habido una hormiga sobre *R*, ¿habría avanzado? — *Sí.* — ¿Habría avanzado desde allá (se señala la isla)? — *Sí.* — (Se pide que haga avanzar *4B*.) ¿se tocó a *R*? — *Sí.* "Se hace avanzar la serie un trecho bastante largo: el dibujo de los desplazamientos de *R* muestra un movimiento continuo.

PAT (4;4) afirma que *R* ha retrocedido, pero al mismo tiempo y en relación con la isla "*avanza hacia allá* (movimiento global de la serie salvo que *R* no ha cambiado de lugar)". Respecto de la oruga, todo lo que se obtiene es una representación del desplazamiento de *R* bajo la forma de un movimiento continuo de círculos apenas desplazados (espiral cerrada).

Lo peculiar de estas reacciones es, pues, la imposibilidad de diferenciar y coordinar la referencia interna (posición de *R* en relación a los *B*) y las referencias exteriores (mesa o isla): por eso, el hecho de que *R* haya cambiado de lugar (Ste) —lo cual es correcto desde el punto de vista de las posiciones respectivas— le parece al sujeto implicar que "ha cambiado de

lugar". Resulta entonces una contradicción que podría parecer insostenible: en relación con la referencia interna *R* "retrocede", y es precisamente eso lo que los sujetos afirman o señalan con un gesto, pero en relación con la isla, o con la mesa, "avanza" (Pat). Ahora bien, esta contradicción no es percibida, por no reunirse las dos referencias en un espacio único.

§ 2 | EL NIVEL IB. — Los sujetos de 5-6 años siguen estando dominados por el sistema interno en cuanto a la posición inicial de *R*, que ellos sitúan a la cabeza de la serie en *X*, una vez que la serie se transforma en *BRBBX* (por el traslado de 3*B*). Pero al mismo tiempo reconocen, en el caso de las piedras, que *R* no ha cambiado de lugar. Por el contrario, en el de la oruga, *R* se desplaza sin cesar a causa de la percepción del movimiento de conjunto:

DOM (6;3). Piedras: "¿Dónde estaba *R* antes? — *Aquí* (en *X* delante de las 3*B* desplazadas). — ¿Ha cambiado de lugar? — *Sí, no, no ha cambiado, pero las otras han cambiado: antes era la primera, pero las otras llegaron allá y entonces está acá* (*BRBBB*)." Oruga: una veces ve a *R* inmóvil y otras declara que "*también se mueve*".

GUR (6;3). Piedras: "¿Está alejada de la isla? — *Sí. ¡Ah! no, estaba siempre allá porque las otras estaban adelante... No, No se mueve.*"

VIO (7;0) queda como caso intermedio entre los niveles IA y IB. Piedras: "*Usted la trasladó.* — ¿La toqué y la moví? — *Sí, allá... ¡Ah! no, ¿qué digo? Usted puso cada vez la de atrás adelante.*" Pero en la serie, en relación con la isla: "*Al menos está más cerca, porque antes estaba allá* (adelante), *después cambia de lugar y así se ve bien que se acerca a la isla*". Pero se acerca a ella y no se aleja, lo que parece ser una cuestión de la posición relativa y no de distancia absoluta, pues en relación con una marca *R'*, "*no ha cambiado de lugar*". Por el contrario, a propósito de la descomposición de los movimientos de la oruga, ella dice de *R*: "*Abajo retrocede, arriba avanza, es un poco como el juego anterior: retrocede siempre para que las otras lo pasen.* — Mira (con una referencia *R'*). — *Sí, sí, ha retrocedido.*"

En lo que se refiere a las piedras, el progreso es claro en la diferenciación y la coordinación de las referencias, pero aún queda por realizar el mismo trabajo con la oruga, donde a estos sujetos el retroceso de *R* aún les parece evidente, e implica en Vio incluso una comparación espontánea con la reacción frente a las piedras, que retrocede a este punto.

§ 3 | EL NIVEL IIA. — Este nuevo estadio se caracteriza por juicios correctos acerca de las detenciones *R* de la oruga, pero sin suficiente integración con el movimiento de conjunto ni suficiente integración entre las traslaciones y las rotaciones:

PHI (6;11): la piedra *R* "*no ha cambiado de lugar: se ponen siempre piedras adelante* (3*B*)". El dibujo de los trayectos de *R* es una serie de arcos cercanos entre sí —o sea, una cicloide— pero no contiguos, sin duda para marcar los momentos de detención. Para la oruga: "*Allá* (abajo) *va a esperar un momentito, después avanza.* — ¿Qué sucede? — *No se mueve... va a esperar su turno un momentito.*"

CRI (7;1) cree primero que la piedra *R* ha retrocedido; después, espontáneamente dice: "*¡Ah, no!, no cambió de lugar.*" Describe correctamente los movimientos de conjunto de *R* y dibuja una cicloide. Para la oruga, espera un movimiento continuo de *R*, después mirando: "*No ha retrocedido ni avanzado; no se mueve.*" Pero el dibujo representa una serie de elipses. Se pone al lado el dibujo de la cicloide de las piedras y él dice "*cuando levantan las piedras es similar, pero las piedras no vuelven hacia atrás*": la comparación de los dibujos hace que Cri regrese respecto del *R* de la oruga, pero olvida el retroceso aparente de la piedra *R*.

LAI (8;10). Piedras: *R* "*estaba siempre en el mismo lugar*", y dibuja una cicloide. Oruga: "*el punto (R) no se mueve, sino que es la goma* (la cinta sinfín) *la que avanza*". Dibujo: elipses aplanadas y discontinuas.

BEL (8;6). Piedras: las mismas reacciones. Oruga: "*R no se mueve; se diría que retrocede, pero las ruedas avanzan: queda en el mismo lugar.*" Dibujos: elipses sucesivas pero con curvas que las unen.

DAU (8;2) en el caso del tanque parece oscilar entre los dos sistemas de referencias: "¿*R* avanza? — *No, retrocede.* — ¿Se aleja del punto hacia donde se marcha? — *No.*". El dibujo anuncia el nivel siguiente en tanto ensayo de integración: marca las posiciones sucesivas del tanque con *R* inmóvil por debajo. En cambio, en el momento en que compara el dibujo de la oruga con el de las piedras, diciendo "*si las piedras fueran la oruga y la piedra R el punto rojo* (*R* de la oruga), *avanzaría siempre así*", vuelve a la idea de retroceso: "*Habría sido necesario hacerlo partir de arriba*" y, sin tocar la hoja indica con el dedo haciendo un gesto de descenso y después de retorno hacia atrás, o sea del retroceso, del que por un instante parecía haberse liberado.

El primer aspecto interesante que ofrecen estas reacciones es que la piedra *R*, considerada inmóvil ya en el nivel IB, se integra ahora a un sistema de conjunto compuesto por estaciones sin desplazamientos después de movimientos semicirculares que conducen de una de la posiciones inmóviles a la siguiente: en este caso los trayectos indicados forman una cicloide correcta, lo que naturalmente es mucho más fácil que en el caso de una rueda o de una oruga, porque entonces la forma del objeto no interfiere la representación cinemática. Por el contrario, en el caso de la oruga, se ve claramente que el punto de referencia *R* está inmóvil en ciertas situaciones, como se comprueba a propósito del de las piedras en el nivel IB, pero sin integración en el movimiento de conjunto, dibujado como una serie de elipses aplanadas, discontinuas o unidas por trazos, pero (salvo Dan por un instante) sin lugares indicados por las estaciones inmóviles de *R*: de ahí la tendencia, en ese momento de la presentación de conjunto, a regresar en la dirección de un retroceso por abajo, como se ve en Cri.

§ 4 | Los niveles IIB y III. — Una integración de ese tipo comienza, en cambio, en el nivel IIB (9-10 años) donde el dibujo de la oruga marca explícitamente los puntos donde *R* está inmóvil y aquellos donde gira para pasar de abajo hacia arriba o a la inversa:

XAV (9;0). Oruga: "*La rueda se ha movido, y aquí* (en la mitad inferior) *R permaneció inmóvil. Después se va a mover, como los bloques* (comparación espontánea)." Respecto de la parte de arriba, piensa que *R* se detiene cerca de la rueda

delantera. "Y cuando se detiene, ¿qué es lo que cambia de lugar? — *Es como si fueran los otros bloques* (los *B*)." El dibujo da todavía elipses discontinuas, pero las tres pri neras muestran las posiciones inmóviles de *R* y las siete últimas su movimiento. Agrega espontáneamente: "*Es como los bloques como si ese (R) fuera el bloque R, y después esa* (la cinta) *los otros bloques (B).*" Comparando finalmente sus dibujos, agrega: "*R permanece allá y, cuando le llega el momento, va de nuevo adelante, mientras que en el dibujo lo hago saltar* (retroceso), *y no es correcto.*"

VUI (9;3). Oruga: *R* "*quedó en el mismo lugar*", y en la serie "*la rueda tomó la punta de la goma donde estaba R, y después lo volvió a poner. Va a retomarlo cuando llegue al otro extremo; lo vuelve a poner, va a quedar en el lugar y después recomenzará*". El dibujo representa los arcos discontinuos y marca los puntos de detención de *R*, así como las zonas donde se mueve. Al comparar los dibujos de las piedras y del tanque, Vui halla sin embargo que en el primero "*R faltan cosas*: *el resto de la goma que vuelve a irse*"; dicho de otro modo, olvida los trayectos de las piedras sucesivas que sin embargo ha marcado al comienzo de su dibujo de las piedras.

GUR (9;3), las mismas reacciones para el *R* de la oruga, con dibujo de elipses que se interfieren en epicicloides. Al comparar este dibujo con la cicloide del *R* de las piedras, Gur dice de este último: "*Este dibujo es correcto para mostrar la altura del tanque, pero el otro es más correcto porque forma el redondel, y muestra mejor el movimiento del tanque.*"

RIO (10;6) dibuja una cicloide para el *R* de las piedras y una serie de arcos ligados por horizontales, de manera de distinguir las fases de inmovilidad y de movimiento. Comparación: "*El punto rojo* (*R* de la oruga) *es como la piedra: avanza, se detiene, avanza: es casi lo mismo*", y llega a la conclusión de que el dibujo de las piedras viene bien también para el tanque.

FUC (10;1), por el contrario, después de haber confesado: "*yo creía que retrocedía*", dibuja una cicloide para el tanque y también para las piedras, pero al comparar los dos dibujos, curiosamente duda de la analogía: "*No, no está bien porque el tanque gira siempre.*"

LUC (10;5). Para el *R* del tanque diguja una epicicloide; después dice: "*Si se volviera enteramente* (realmente) *hacia atrás, estaría en el lugar*" (el tanque no avanzaría); entonces dibuja una cicloide como para las piedras: "*Sí, es lo mismo, porque el punto rojo* (*R* de la oruga) *y la piedra roja esperan a que se los venga a tomar. No hay ninguna diferencia.*" Por el contrario, para una rueda aislada, vuelve a la epicicloide: "*Vuelve hacia atrás, pero no adonde había partido, si no, la rueda quedaría en el lugar.*"

NIQ (12;2) traza, en el caso de las piedras, una cicloide, y en el de la oruga una epicicloide, y agrega: "*El dibujo de las piedras sirve también para la oruga si se lo ve de noche* (únicamente con *R* alumbrado); *si se ve de día, no va porque R volvería* (= parecía volver) *cada vez hacia atrás.*" Niq diferencia así las referencias coordinándolas sin contradicción.

La novedad importante, propia del estadio III, es que la inmovilidad momentánea de *R*, comprobada desde el nivel IIA pero no prevista incluso en el nivel IIB, es ahora anticipada antes de cualquier manipulación:

FLU (12;1): "¿Qué camino va a hacer el punto de referencia (*R*) si el tanque avanza hasta el extremo de la mesa? — *Cuando la rueda llegue allá* (arriba), *él va a quedar en el mismo sitio. Sube cuando llega adelante; se queda de nuevo en el mismo sitio* (abajo) *hasta que la rueda llega arriba* (y lo arrastra). — ¿Cómo adivinaste? — *Porque la rueda es la que gira, y esto* (la cinta de goma) *se desliza hacia arriba..*" Comparación: "*Eso* (el arco de la cicloide) *es más pequeño aquí* (piedras). — Pero primero lo que tienen de parecido. — *Allá* (piedras) *es el rojo* (*R*) *y aquí es el mecanismo* (también *R*). *Los dos permanecen en el mismo lugar y después vuelven a partir.* — ¿Y cuál es la diferencia? — *Allá la distancia es más pequeña* (de una posición de la piedra a otra). *La oruga hace dos veces y media esta distancia* (muestra el lugar entre las dos ruedas)."

Estas reacciones se observan desde los once años, con un caso de diez años.

§ 5 | CONCLUSIONES. — La evolución que acabamos de exponer constituye una serie de integraciones y de diferenciaciones alternadas, pero comenzando por un nivel IA donde las diferencias son experimentadas simplemente por abstracción empírica con el establecimiento de tan pocas relaciones (o integraciones) reflexionantes que quedan encerradas en una contradicción espectacular: el punto de referencia *R* "retrocede", como lo sugiere la percepción de modo muy evidente en función de la referencia interna, pero al mismo tiempo "avanza" en relación con las referencias exteriores. El nivel IB está caracterizado por una primera integración: la de las dos referencias de las piedras en un espacio único; de ahí la inmovilidad momentánea de *R* (mientras que en el caso del tanque la impresión perceptiva del movimiento sigue dominando). Esta integración se debe seguramente a una abstracción reflexionante, puesto que consiste en abolir una contradicción sin modificar los datos empíricos, o sea consagrarse a una coordinación inferencial que relativiza el retroceso y lo vincula a una sola de las dos referencias, subordinando así el todo a las referencias exteriores, más generales y más estables. Dicho de otro modo, el "reflejamiento" de los elementos observables en el plano de la inferencias, o sea, de las coordinaciones representativas, implica una "reflexión" que anula la contradicción.

El nivel IIA es el de una diferenciación, pero esta vez debida a un esfuerzo de análisis: el punto de referencia *R* de la oruga se concibe desde ahora ya inmóvil ya en movimiento. Pero esta inmovilidad momentánea solo es aceptada en virtud de comprobaciones (no enteramente empíricas, por otra parte, porque son relaciones con la referencia externa), y aún no es comprendida. En efecto, comprenderla supondría una coordinación de los movimientos de rotación (rotación de *R* en relación con la referencia interna) y de traslación (desplazamiento general del tanque), de tal modo que el retroceso de *R* en relación con la mitad del tanque se convierte en inmovilidad por el hecho de que este avanza. Hay, pues, diferenciación sin integración, lo que constituye sin embargo un progreso notable.

En el nivel IIB, esta integración ya se adquiere y resulta suficiente para que los dibujos marquen claramente las fases de detención y de movimiento como distintas. El progreso de los dibujos muestra así que se ha alcanzado un nuevo grado de "reflejamiento": aquel donde las observaciones sucesivas

y más o menos discontinuas son reunidas en un todo simultáneo, obligando consecuentemente a la "reflexión" a coordinar las detenciones de *R* con el movimiento de conjunto del tanque. Aquí de nuevo la integración procede de una abstracción reflexionante con sus dos dimensiones de "reflejamiento" y de "reflexión". Solo falta entonces la anticipación de ese sistema en su conjunto, y eso es lo que se obtiene en el estadio III por abstracción a partir de las coordinaciones precedentes.

Otro punto interesante de este desarrollo es que como la solución del problema de las piedras se anticipa a la de las preguntas referentes al tanque, la comparación de las dos puede dar lugar a dificultades por el hecho (que, por otra parte, facilita la confrontación) de que esa solución se refiere a los dibujos mismos, y no a simples reconstrucciones verbales. En estas "abstracciones reflexionadas" que representan las comparaciones explícitas no solo asistimos a retrasos en relación con el proceso "reflexionante" mismo, sino también a una especie de regresiones. Así vemos que Vio, en el nivel IB, en una comparación espontánea hace retroceder el *R* de las piedras al igual que al de la oruga porque "es un poco como el juego anterior", mientras que había renunciado a ese retroceso a propósito de la piedra roja. En el nivel IIA, Cri va todavía más lejos: justo después de haber afirmado que el *R* del tanque "no retrocedió ni avanzó, sino que no se mueve", declara, comparando su dibujo de la oruga con el de los bloques, que existe una diferencia, a saber, que estos "no vuelven hacia atrás" como el *R* del tanque. La misma reacción en Dau. Por tanto, solo en el nivel IIB la comparación ya no plantea ningún problema (salvo en Vui, que olvida el trayecto de las piedras), o incluso conduce a una mejor toma de conciencia, como en Xav y sobre todo en Niq con su ocurrente distinción entre lo que se ve a la luz del día y lo que se podría ver "de noche" iluminando solamente a *R*, es decir, entre la percepción ilusoriamente modificada por la referencia interna y la percepción que se torna objetiva al apartarse de esta.

En síntesis, como de costumbre, las abstracciones "reflexionadas" debidas a las comparaciones están primero retrasadas respecto del proceso "reflexionante" mismo, después alcanzan el mismo nivel y pueden entonces servir de trampolín para un nuevo adelanto en la dirección del pensamiento reflexivo constituido por reflexiones sobre las reflexiones anteriores.

CAPÍTULO XVI

Abstracciones a partir de acciones de desplazamiento y de sus coordinaciones

EN COLABORACIÓN CON J. CAMBON Y J. CUAZ

Sería inexacto limitarse a decir que la abstracción reflexionante extrae sus informaciones de las acciones del sujeto mientras que la abstracción empírica las toma de los objetos. En efecto: el sujeto puede percibir sus acciones y sus resultados (ya se trate de percepciones propioceptivas o visuales, táctiles, etc.) de manera análoga a como conoce las propiedades o los movimientos de los objetos, es decir, considerando esas acciones solo en su aspecto material: se trata entonces, desde luego, de abstracciones empíricas, mientras que la abstracción reflexionante se refiere únicamente a la coordinación de acciones, cuyas formas generales (reunión, orden, correspondencias, etc.) están en la raíz de las estructuras lógicomatemáticas. Pero entonces ¿dónde está la frontera entre las acciones, en tanto materiales, y sus coordinaciones, en tanto fuente de comprensión?; ¿no se corre el riesgo de incurrir en afirmaciones circulares y triviales que equivalgan a decir que una de las dos formas de abstracción se limita a comprobar, mientras que la segunda consiste en comprender? Ahora bien, si globalmente es así, es obvio que los problemas reales son los del proceso: ¿"cómo " llega el sujeto a comprobar objetivamente, y mediante cuáles mecanismos llega a comprender? Tales son los problemas que nos proponemos discutir a propósito de una prueba de inteligencia práctica, la del "pasador" (escala de Alexander).

Se trata de tres bandejas cerradas que contienen bloques cuadrados o rectangulares azules o rojos con un pequeño espacio vacío (véanse las figuras); el borde superior de las bandejas está pintado de rojo y el borde inferior de azul. El problema consiste en desplazar los bloques, puestos inicialmente del lado azul, hasta situarlos

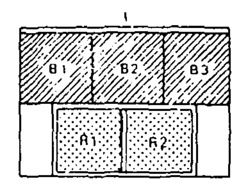
en el lado rojo, y ello simplemente empujándolos, sin sacarlos de la caja. El dispositivo I es de solución fácil: basta con mover los cuadrados rojos a derecha o a izquierda, y después desplazar los azules con un movimiento de circunducción, siguiendo los bordes de la bandeja. Por el contrario, los dispositivos IIA y IIIA y B implican una pequeña dificultad: se trata, en un momento dado, de ubicar uno al lado del otro dos cuadrados que están dispuestos verticalmente (o a la inversa), lo que denominaremos un "desplazamiento angular" (de 90°) y cuyas imprevistas complicaciones podrán advertirse en la medida en que los jóvenes permanecen aferrados al dato figurativo en lugar de intentar todas las combinaciones. La figura IIIB difiere de IIIA solo por la sustitución de los dos rectángulos azules *B3* y *B4* por un cuadrado grande azul lo que viene a ser exactamente lo mismo, salvo para los sujetos que se atienen únicamente a las propiedades figurativas de tamaño. Por último, los modelos IIB y IIIC no poseen solución posible.

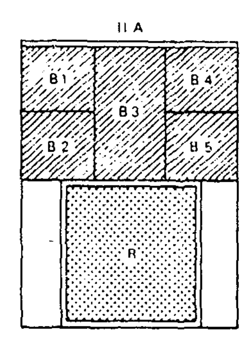
Se presentan las tres bandejas siempre en el mismo orden. Se hace describir el material solo en el caso I, después se pide que se ejecuten las tareas. A continuación se le pregunta al sujeto qué es lo que ha hecho y por qué, pero como la verbalización es aquí muy pobre, ocasionalmente utilizaremos solo esos datos en general insignificantes. Respecto del modelo I, se pregunta, después de la solución correcta, si hay otras soluciones posibles (¡hay doce!). En cuanto al modelo IIIB, se hace hallar al niño la diferencia con IIIA. Además, para IIB y IIIC se pide que prevean la acción antes de ejecutarla.

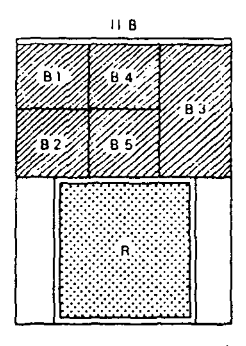
Se termina el interrogatorio con una comparación entre los diversos dispositivos, y en especial pidiendo al sujeto una nueva construcción: se vacía una de las bandejas y con una cantidad de bloques a disposición del sujeto, se le pide que imagine una nueva combinación de tal modo que un compañerito pueda solucionar la prueba.

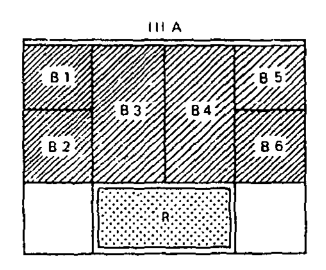
§ 1 | LOS ESPACIOS VACÍOS. — Para comenzar por la acción más general que interviene en estas conductas, y que es la del simple desplazamiento de un elemento hacia el espacio libre más cercano, parece que en ella no interviene ninguna coordinación sino la subordinación de ese movimiento al fin general, que será el de llegar por etapas —no necesariamente experimentadas en detalle— a acercar a los bloques rojos al borde del mismo color. Pero sabemos que hasta la edad de ocho o nueve años y medio, cuando se trata de estimar como iguales o desiguales las longitudes de dos varillas que inicialmente se ha comprobado que son congruentes, y después ligeramente desplazadas, o de construir caminos paralelos iguales pero con puntos de partida un poco desplazados, los sujetos solo tienen en cuenta lo que excede en el punto de llegada, sin ocuparse del espacio que en el punto inicial dejó vacío el elemento que sobrepasa al otro al término del desplazamiento; de ahí la idea de que esa varilla o ese camino se ha alargado en la llegada por no conservarse las longitudes. Estas reacciones muy generales permiten, pues, pensar que el desplazamiento operatorio, en tanto transformación de las posiciones, reversible y sometido a leyes estrictas de composición, supone más coordinaciones de lo que parece, comenzando por una compensación exacta de las adiciones y de las sustracciones o elementos positivos y negativos, o sea, de los espacios ocupados y de los espacios todavía vacíos (o dejados vacíos).

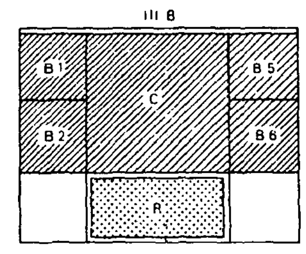
Ahora bien, es interesante notar, en la presente prueba, que si, en ocasión de los desplazamientos progresivos, los llenos y los vacíos están dados en la inspección perceptiva, y son por tanto objetos de abstracciones empíricas, no sucede lo mismo cuando se pide al sujeto que invente un juego

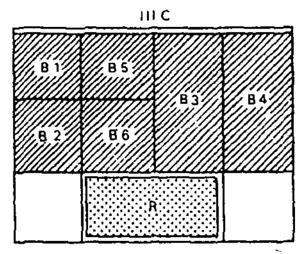

I
B1
B2
B3
R1
R2


II A
B1
B3
B4
B2
B5
R


II B
B1
B4
B3
B2
B5
R


III A
B1
B3
B4
B5
B2
B6
R


III B
B1
C
B5
B2
B6
R


III C
B1
B5
B3
B4
B2
B6
R

análogo tal que pueda ser resuelto por otro niño. En ese caso la reacción de los pequeños sujetos consiste en llenar primero toda la caja de piezas, sin figurarse, antes de realizar los ensayos materiales, que de ese modo ningún elemento puede ser desplazado:

MAS (6;3) ubica en la hilera superior de su caja (borde rojo) un cuadrado grande azul, un rectángulo vertical azul y un rectángulo vertical rojo, y en la hilera inferior un pequeño cuadrado rojo, otro azul y un rectángulo horizontal rojo: "¿Qué le pedirás que haga? — *Que ponga los rojos contra* (el borde) *rojo y los azules contra el azul.* — ¿Lo podrá hacer? — *Sí, quizás* (= si está a la altura). — ¿Cómo haría? — *Movería* (muestra la cercanía del cuadrado rojo inferior)... *¡Oh! no hay lugar... entonces...* — ¿Es fastidioso que no haya lugar? — *Hay que quitar ese* (rojo de abajo) *No, este* (azul del costado). — ¿Por qué es necesario un lugar? — *Porque no se puede desplazar los cubos.*" Hay que destacar que incluso son ese "lugar" finalmente agregado, la solución es imposible.

RYA (6;1) llena su caja del mismo modo: tres elementos azules (dos cuadrados y un rectángulo horizontal) contra la línea roja; después una hilera mediana, una hilera de rojos (un rectángulo horizontal seguido de dos cuadrados), y contra la línea azul una hilera idéntica de rojos: "¿Qué hacer? — (Se apresura a desplazar los azules.) *¡Ah! no se puede, porque hay que quitar esos dos* (cuadrados azules.) — ¿Por qué? — *Porque no se pueden mover las cosas cuando están todas.*"

GRA (7;3), las mismas reacciones, pero incluso después de haber dejado un cuadrado vacío, la solución sigue siendo imposible, porque habría que dar vuelta uno de los tres rectángulos contiguos.

BAN (8;3) a pesar de su edad llena toda la caja con tres cuadrados rojos y tres azules y con un rectángulo rojo y dos azules: "¿Entonces tú qué pides? — *Que ponga más rojos aquí* (borde rojo). — ¿Podrá hacerlo? — *Sí* (sin vacilación). — ¿Dándole la caja tal como está allí? — *Sí, seguro, sí, poniendo el rojo aquí.* — ¿Cómo harías? — *Los desplazaría.* — ¿El podría? — *¿Desplazarlos?* — *Sí.*" Se recuerda la consigna, no olvidada por otra parte, y ella entonces comprueba: "*¡No hay lugar para moverlos!* Hace una nueva disposición pero de solución imposible a causa de los rectángulos. Sin embargo, Ban reacciona normalmente frente a las otras cuestiones de su nivel.

Es evidente que el olvido del lugar vacío necesario para el desplazamiento en la dirección que debería seguir, no tiene ni la misma resistencia (se trata en especial de sujetos de 5-6 años), ni la misma significación que, mucho más duradera, del lugar que se dejó vacío en el punto de partida del móvil (o sea, en el punto del que este se aleja). No es menos interesante comenzar por comprobar que cuando los pequeños sujetos hacen un proyecto de desplazamientos análogos a los que acaban de efectuar sobre los dispositivos I a III, no satisfacen la primera condición de la coordinación de los movimientos, es decir, la compensación de los espacios llenos y los vacíos.

En cuanto al hecho de que la disposición propuesta se mantiene sin solución, una vez restablecido el lugar vacante, ya volveremos en el § 4. Limitémosnos por el momento a comprobar que este índice se agrega al precedente para mostrar que los desplazamientos sucesivos realizados por el sujeto no

están coordinados entre sí en el sentido de una composición anticipada: incluso cuando hay solución correcta (cosa que es general desde los 5-6 años para el modelo I), hay utilización paulatina de los vacíos dejados por el desplazamiento precedente, lo que hace mucho más instructivo el olvido de esta condición necesaria en ocasión de los proyectos del sujeto. Pero, si bien todavía no hay anticipación coordinadora y cada etapa de la solución sigue estando dominada por las abstracciones empíricas, no es menos evidente que la subordinación de los medios sucesivos al fin, así como la comprensión general de la necesidad de los vacíos tan pronto como se comienzan los ensayos, testimonian un comienzo de abstracción reflexionante cuyo progreso se describirá en el § 5.

§ 2 | DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y REVERSIBILIDAD. — Entre los primeros criterios de coordinación anticipatoria que se constituyen, se encuentra la capacidad de desplazar en elemento al lado del otro cuando los dos están situados uno encima del otro, o, recíprocamente, de disponerlos uno encima del otro cuando están en la misma línea horizontal. En este caso hablaremos de desplazamiento angular (de 90°) puesto que se trata de reemplazar una disposición horizontal por una vertical o a la inversa. Ahora bien, el problema tiene su aspecto interesante, porque los desplazamientos más simples se hacen en dirección única, ya sea vertical u horizontal (en función de los espacios vacíos arriba, abajo o al costado), mientras que para llegar a un desplazamiento angular es necesaria una anticipación: al tener dos elementos superpuestos o yuxtapuestos, al lado o arriba de sí, dos lugares vacíos, hay que resistir a la tendencia de desplazar los dos a la vez (como se acaba de hacer), y es necesario descomponer y recomponer los dos desplazamientos, de los cuales uno es vertical y el otro horizontal, todo esto con la intención de poder poner en movimiento, o bien uno de los cuadrados grandes de las figuras II y III, o bien un rectángulo, si no están bloqueados por sus dimensiones. Efectivamente, estos desplazamientos angulares presentan grandes dificultades en los niveles inferiores:

RYA (6;1) (véase § 1) soluciona sin dificultad la prueba I moviendo *R1* y *R2* hacia la derecha y desplazando todos los cuadrados azules a lo largo de los bordes superior y de la izquierda. Llega a volverlos a poner en el lugar en orden inverso, y, cuando se le pide otra solución, mueve *R1* y *R2* hacia la izquierda indicando la marcha (simétrica de la primera) de los cuadrados azules por el borde de la derecha: por lo tanto su nivel ya no es muy primitivo. Pero, para el modelo IIA, se contenta con el mismo procedimiento: *R* a la derecha, descenso de *B1* + *B2, B3* a la izquierda, después *B4* y *B5* juntos hacia la izquierda dejándolos superpuestos. Entonces se detiene y cree que la solución es imposible: "*Aquél* (*R*) *no se lo puede poner arriba porque no es bastante delgado.*" Se la ayuda con una frase sugerente: "A aquellos dos (*B*4 y *B*5) no los puedes mover de otro modo." Tantea desplazándolos uno tras otro y encuentra entonces un alineamiento horizontal que le permite subir *R* un espacio bajando *B1* + *B2* y desplazando *B3* hacia la izquierda. Pero se trataría entonces de hacer un nuevo desplazamiento angular para poner *B1* y *B2* uno al lado del otro, y Rya se encuentra de nuevo sin posibilidades de avanzar: "*No se puede dar vuelta aquel* (*B3*): *queda encerrado.*" Después, tanteando, llega: de lo cual, a pesar de los varios ensayos, concluye que el dispositivo IIB tiene una solución: "*Sí, creo que se puede probar";* lo mismo repetirá para IIIC. En cuanto a IIIA, llega por tanteos al

primer desplazamiento angular, pero se bloquea definitivamente para el desplazamiento de *B5-B6*, a pesar de distintos estímulos.

MAS (6;3) soluciona correctamente la prueba I y llega al punto de partida por medio de una misma circunducción por el borde de la caja. En IIA, tantea después de haber movido *R* hacia la izquierda y *B3* a la derecha, y llega a poner *B1* y *B2* en posición oblicua ( ) antes de comprender que los puede alinear horizontalmente. Pero hay en ello una parte de azar, porque se encuentra de nuevo bloqueado en el segundo desplazamiento angular (*B4B5*). Después de lograr la solución correcta, fracasa en el retorno a la posición inicial, y no llega a encontrar los desplazamientos angulares a pesar de intentarlo repetidas veces. En IIIA, tampoco llega sin ayuda a superar esa dificultad angular. En cuanto al dispositivo IIIB, cree que la solución es imposible cuando de hecho es idéntica a la de IIIA: "*Es demasiado ancho* (el cuadrado grande). — ¿No son lo mismo ese cuadrado grande y esos dos (rectángulos) de allá (IIIA)? — *No, aquellos van mejor: son más delgados y se los puede desplazar mejor.*"

En el nivel IIA (7-8 años) el sujeto encuentra por sí mismo ciertos desplazamientos angulares, pero sin generalización y con las mismas dificultades en el orden inverso (retorno a la situación inicial):

NAT (7;1) ya anticipa lo que va a hacer en relación con el dispositivo I y logra en seguida la solución correcta, así como también el camino inverso. Para IIA, encuentra inmediatamente el desplazamiento angular de *B*, *B2*, duda un instante para el desplazamiento de *B4B5*, pero también lo halla sin ayuda. Se vuelve a hacer un desplazamiento angular con dos cuadrados: "¿Por qué hiciste eso? — *Para poder mover el cuadrado grande.*" Por el contrario, en el camino inverso se bloquea en los dos desplazamientos angulares: "*Aquél* (*B4*) *es el que me molesta. Incluso si los pongo así* (en diagonal), *no puedo... ¡Ah! sí* (pone *B4* encima de *B5*), *puedo.* — ¿Por qué no iba? — *Porque me había olvidado de poner los dos así* (paso de la horizontal a la vertical)." Ahora bien, en IIIA olvida de nuevo este procedimiento y se bloquea tres veces seguidas hasta que vuelve a comenzar otras tres veces y finalmente solo logra la solución correcta en el segundo con estímulo del experimentador. Dificultades acrecentadas en el orden inverso. En cambio, ve enseguida que IIIB no difiere de IIIA: "*Si se pegan esos dos* (rectángulos B3 y B4) *se forma un cuadrado grande.*"

COL (8;5), en IIA, después del desplazamiento de *R* y de *B3*, la molestan *B4-B5*; los pone en diagonal, los vuelve a poner verticalmente y "*¡Ah!*" comprende el alineamiento horizontal posible. Generaliza sin dificultad a *B*1 y *B*2, pero para IIIA vuelve a tantear cuando tiene que hacer el primer desplazamiento angular y logra efectuar correctamente el segundo sin problemas. Para IIIB cree primero que la solución es "*más difícil, porque hay un cuadrado*"; pero cuando lo intenta "*pienso que andará: se hace como si fueran dos barras*".

Finalmente, en el nivel IIB los desplazamientos angulares no plantean más problemas, pero, cosa curiosa y para tener en cuenta, el sujeto tiene la impresión de haber efectuado una acción inesperada, como si se tratara de una adquisición reciente y poco fácil, y la menciona con cuidado en sus comentarios:

PER (9;4) para IIA efectúa sin dudar los dos desplazamientos angulares, lo mismo que en el orden inverso (retorno) después, en su relato: "*Ponía los cuadraditos azules uno abajo y otro arriba*" (orden inverso).

FAG (9;5) lo mismo para IIA: "*Moví los dos cuadrados que estaban derechos* (verticales) *y los puse acostados* (horizontales). Para IIIB declara inmediatamente: "*Aquéllos* (los rectángulos de IIIA) *forman como un cuadrado grande: es lo mismo.*"

JAL (10;2): IIA: "*Antes estaban en columna, entonces los puse en línea.*" Marcha inversa inmediata. IIIB: "*No pienso* (que eso cambie), *porque forma como un cuadrado.*"

MAN (10;11) en su comparación de IIA y de I: "*No se parecen del todo, porque tuve que separar los dos trocitos* (cubos)... *En el primero* (I) *solo había que dar vuelta* (circunducción) *y eso era todo.* — ¿Por qué hiciste eso (desplazamientos angulares)? — *No podía hacer de otro modo, si no, no hubiera podido subir el rojo.*" IIIB: "*Podría hacer lo mismo porque yo movía a los dos* (rectángulos en IIIA) *juntos.*"

Por fin, en el estadio III el desplazamiento angular parece muy natural y no siempre es notado, sino que forma parte de lo que parece esencial, que es la movilidad de los cubos pequeños:

MOR (12;0) prevé dificultades para IIIA a causa de los dos rectángulos, después logra la solución enseguida: "¿Cómo llegaste? — *Porque sin esos cubos pequeños yo no puedo manipular los otros.*" Vuelve a lo mismo en IIIB: — "*Porque hay cubos pequeños: es lo mismo.*"

BOI (12;1): "*porque había cuatro cuadrados móviles*".

Esta evolución de los desplazamientos angulares, junto a la de las marchas en orden inverso y a las reacciones ante el dispositivo IIIB, comparado con IIIA, es bastante instructiva en cuanto a las relaciones entre la abstracción reflexionante y la abstracción empírica. En efecto, está en el dominio espacial, se refiere al aspecto figurativo de los objetos, es decir, a sus formas y a sus dimensiones, a sus configuraciones de conjunto o a sus movimientos, pero en tanto trayectos materiales aislados que presentan *Gestalts* como figuras estáticas. La abstracción reflexionante de naturaleza geométrica se refiere, en cambio, a las coordinaciones de acciones en tanto combinaciones libres y composiciones que sobrepasan las relaciones simplemente comprobadas. Por cierto que estas composiciones de desplazamientos dan igualmente lugar a comprobaciones y están sometidas a soluciones exitosas que también son comprobadas, pues lo propio de las operaciones espaciales (lo que las distingue de las operaciones lógicoaritméticas) es poder traducirse en detalle en imágenes o representaciones figurativas. Pero el criterio fundamental de las coordinaciones logradas correctamente, de las que procede la abstracción reflexionante, es su necesidad intrínseca, en oposición a las soluciones aleatorias o simplemente comprobadas.

Dicho esto, el carácter destacable de la resistencia de los niños a los desplazamientos angulares está dado por el hecho de que no llegan a desprenderse del aspecto figurativo dado de dos cubos ubicados uno encima o al lado del otro, y no tienen por sí mismos la idea de esta combinación, —que si bien es extremadamente simple, es, empero, nueva en relación con la configuración comprobada— de permutar la superposición en una yuxtaposición lateral o a la inversa, es decir, hacer girar sin más un

cubo 90° respecto del otro. En una investigación realizada con A. Munari se presentaba a los sujetos segmentos de rieles, unos curvos y los otros rectilíneos con la única consigna de unirlos para hacer un trayecto de un punto a otro: ahora bien, los sujetos preoperatorios los relacionaban fácilmente, pero dejándolos exclusivamente en su posición fortuita comprobada (∩ ó ∪) sin que se les ocurriese darlos vuelta, a pesar del total fracaso en la construcción del trayecto pedido. Dudamos entonces ante la posibilidad de considerar como general esta sumisión al aspecto figurativo de las formas exhibidas, pero la presente resistencia a los desplazamientos angulares es casi más sorprendente. Además, se comprueba que la solución de esta cuestión da lugar a una interesante evolución: soluciones correctas fortuitas o fracasos (salvo que haya ayuda) en el estadio I, soluciones correctas semioperatorias en el nivel IIA, pero sin generalización, soluciones completas en el nivel IIB con sentimiento de necesidad ("no lo podía hacer de otro modo, si no..."; Man) y conducta evidente en el estadio III, siendo destacada solamente la movilidad de los cubos pequeños...

En cuanto a los retornos en el camino inverso, se comprueba que son fáciles en el caso del dispositivo I, donde la solución se impone paulatinamente por simple circunducción. Pero entonces no se trata de otra cosa que de "reversibilidad" y no de reversibilidad operatoria, debiendo esta ser general: ahora bien, en el caso de los desplazamientos angulares la reversibilidad solo se alcanza en el nivel IIB.

Por último, el paso de los dispositivos IIIA a IIIB proporciona un nuevo ejemplo, y muy lindo, del contraste entre la pregnancia de lo figurativo, fuente de las abstracciones empíricas, y la coordinación de las acciones, fuente de la reflexión: los pequeños sujetos ven una dificultad infranqueable si dos rectángulos (*B*3 y *B*4 en IIIA), que siempre fueron desplazados juntos, son reemplazados por el cuadrado grande *R* en IIIB, porque es demasiado grande, mientras que en el nivel IIA ya el comienzo de las coordinaciones operatorias conduce al sujeto a admitir que eso viene a ser lo mismo.

§ 3 | NÚMERO DE POSIBILIDADES Y SOLUCIONES IMPOSIBLES. — Lo propio de las combinaciones de desplazamientos libres, pero sometidas a la condición de una solución correcta necesaria y no fortuita, es suponer una capacidad de anticipación, porque se trata de mecanismos deductivos. Ya hemos visto (en § 1) que esta falta en el estadio I en lo que concierne a los espacios vacíos, pero es solo una laguna momentánea, porque todos los sujetos comprenden, a partir de las pruebas e incluso a partir de sus proyectos, que tales espacios vacíos son necesarios para los desplazamientos. En cambio, pueden obtenerse anticipaciones más refinadas y, sobre todo, más detalladas examinando las reacciones de los sujetos frente a las soluciones imposibles IIB y IIIC, sin olvidar los modelos que ellos mismos proponen.

Se podía esperar obtener igualmente indicaciones acerca de las previsiones deductivas interrogando al niño sobre los diversos métodos posibles que implica el dispositivo I, ¡y que son 12! Pero desde el estadio I se encuentran sujetos (véase Rya en § 2) que descubren la solución simétrica a la suya (lo que no es muy complicado porque se trata de una circunducción por los

bordes derecho o izquierdo) y esa cantidad de dos sigue siendo bastante general hasta el nivel IIB, donde pasa a tres (izquierda, derecha o al medio).

Por el contrario, las figuras IIB (donde el rectángulo *B*3 es simplemente permutado por *B*4 y *B*5, lo que excluye su desplazamiento angular) y CIII (donde los dos rectángulos, *B*3 y *B*4, de IIIA son desplazados a la derecha, lo que excluye de nuevo el desplazamiento angular de los cuadrados) dan lugar a reacciones interesantes: en los sujetos del estadio I y también, en ciertos casos, del nivel IIA; el método empírico que emplean para los modelos de solución posible les hace creer que tendrán éxito en cualquier situación y, además, que, como los bloques *B* y *R* son los mismos en las figuras IIA y IIB o en IIIA y IIIC, sus cambios de posición no tienen importancia:

MIL (5;3) para IIB: "*Usted cambió la barra* (de lugar) — ¿Podrías introducir el cuadrado rojo, etcétera? — *Sí.* — ¿Como antes, incluso si cambié de lugar? — *Sí.*" Pero sus intentos lo fuerzan a reconocer que el rectángulo B*3* es un estorbo. Para IIIC, cree también encontrar la solución correcta: "¿No cambia nada si el cuadrado grande azul está allí (se lo ha puesto después de IIIB en el lugar de *B*3*B*4)? — *No.* (Varios intentos.) — ¿Por qué ese cuadrado te molesta y hace un rato (IIIB) no te molestaba? — *No se puede.*"

BET (:5;10). IIIC: "¿Qué es lo que hice? — *Puso los cuatro cuadrados de un lado y los rectángulos del otro.* — ¿Vas a poder? — *Sí.* — ¿Por qué? — *Estoy seguro de que andará bien.*"

RYA (6;1, véase en § 2). IIB: "¿Cambia algo? — *Es un poco más difícil.* — ¿Y se puede lograr la solución correcta o no? — *Sí, yo creo que se puede probar.*" IIIC: la misma fórmula, y ella supone que "*a esos* (los cuadrados pequeños) *se los puede dar vuelta*". Invoca, pues, un desplazamiento angular posible cuando no hay espacio vacío (cf. su propio modelo en § 1).

MAS (6;3 cf. en § 2). IIB: "*Usted tomó aquél* (*B*3) *y lo puso aquí.* — ¿Eso cambia algo? — *Nada.* — ¿Por qué? — *Porque el rojo está siempre abajo y los otros arriba.*" Pruebas: "*No puedo... no, creo que sí, puedo.*" IIIC: las mismas reacciones. Su propio modelo (véase en § 1) es también de solución imposible.

NAT (7;1 véase en § 2), aunque de nivel IIA para los desplazamientos angulares cree poder resolver la cuestión IIB, pero comprende en los ensayos que *B*3 impide los movimientos de *R*. Para ello IIIC, las mismas reacciones; después, tras el fracaso, muestra el obstáculo pero no por eso deja de extraer la conclusión: "*Se ha cambiado de lugar.* — ¿Es importante el lugar? — *No, eso no importa.*" Su propio modelo es imposible aunque incluye un espacio vacío.

Esas respuestas confirman con toda evidencia la ausencia de anticipación deductiva en el estadio I y la fragilidad de sus comienzos en el nivel IIA. El principio de tales reacciones es claramente formulado por otro sujeto: "Si llegué antes (en IIA), puedo llegar ahora... con un poquito de paciencia." Dicho de otro modo, lo que cuenta es la presencia de los mismos elementos con sus formas y sus tamaños, mientras que las relaciones de posición "no importan" (Mas) o también: "Eso ha cambiado en algo pero

no demasiado", lo que quiere decir que los movimientos sucesivos son para calcular de a poco según situaciones particulares sin implicar composiciones de un conjunto preciso.

En cambio, en parte en el nivel IIA y un poco más en el IIB, hay un comienzo de anticipación o, más precisamente, un comienzo de comprensión de las razones de la imposibilidad, pero sobre la marcha y después de ensayos infructuosos:

ANG (7;3) para la figura IIB intenta primero "*hacer lo mismo que antes*" pero ve rápidamente que "*aquél* (*B*3) *molesta: debería estar en el medio*".

COL (8;5 véase en el § 2): la misma reacción para IIB; después: "*Es más difícil con la barra en el borde, está bloqueado.*" Hay que "*volver a ponerla en el medio, porque se la podría bajar, de otro modo queda solamente la barra y no se la puede dar vuelta*". IIIC: "*Puedo, no sé.* — ¿Cambia algo? — *Sí, porque hay dos barras una al lado de la otra y los cuadrados no están separados* (recordemos que ella ha descubierto sola los desplazamientos angulares)."

PER (9;4 véase en § 2). IIB: "¿Lo que yo hice (desplazar *B*3*B*4) no ha cambiado nada? — *¡Ah, sí!, cambia.* — ¿Pero tú podrías hacerlo? — *Sí.*" (Ensayos.) Después ella muestra que en IIIA se puede hacer un desplazamiento angular de los cuadrados pequeños y "*no puedo hacerlo más* (muestra *B*4 en el lugar de *B*5-*B*6)".

GAY (9;11) piensa llegar a IIB; después de los ensayos dice que el rectángulo obstaculiza: "*Tenía* (en IIA) *dos cuadrados y podía hacerlos pasar.*"

MAN (10;11 véase en § 2) se aproxima a las reacciones del estadio III: "¿Vas a llegar (IIB)? — *No sé, no creo pero voy a intentar; no lo puedo decir de antemano.* (Comienza.) *Va a ser difícil.* (Intentos de desplazamientos angulares en *B*1*B*2, después *B*5*B*6.) *Es este* (rectángulo) *el que les impide moverse. ¡Oh! Yo diría que no hay modo: aquel necesitaría un cuchillo para partirlo en dos.* — ¿Por qué ya no llegas? — *No puedo separarlos* (a los cuadrados)." Las mismas reacciones para IIIC.

Veamos por fin un caso de anticipación propiamente dicha (estadio III):

MOR (12;0 véase en § 2). IIB: "¿Qué es lo que cambié? — *Casi nada: usted los invirtió a los dos.* — ¿Podrás llegar? — (Larga reflexión, sin probar.) *No puedo porque ese no juega, porque aquí* (donde) *hubiera tenido que partirlos serían necesarios dos cubos pequeños... Podría probar muchas veces, pero no llegaría.*" IIIC (reflexiona largo tiempo): "*No es posible porque aquí estaría bloqueado.*" Construye por sí mismo tres modelos diferentes, todos con soluciones posibles.

Al comparar esta evolución con la de los desplazamientos angulares, que también exigen una parte de anticipación, se comprueba un cierto avance de esta, porque esos desplazamientos son adquiridos desde el nivel IIB, e incluso en parte desde el IIA, pero sin generalización, mientras que las imposibilidades solo son realmente previstas y calculadas en el estadio III (y aún no de modo inmediato). La explicación parece ser que los desplazamientos angulares suponen simplemente la previsión de una nueva combinación posible, pero que aún falta comprobar para ver sus resultados, mientras que la anticipación de una imposibilidad implica además la comprensión de la

razón de esta y marca por tanto un progreso decisivo en el sentido de las composiciones "necesarias".

§ 4 | CONCLUSIONES. — El problema que se plantea al término de esta investigación es el de saber si, una vez admitidas las estrechas correspondencias entre el espacio de los objetos y la geometría del sujeto, la abstracción reflexionante no sería, en el ámbito espacial, un derivado de las abstracciones empíricas a partir de las acciones materiales del sujeto, incluidos sus resultados, y de las interacciones comprobadas en los objetos siendo estos doblemente empíricos, simplemente sistematizados etapa por etapa gracias a los progresos de la lógica del sujeto. Pero antes de demostrar que nuestras experiencias no concuerdan con tal interpretación, recordemos la compleja posición epistemológica de la geometría, pues en estos difíciles problemas es útil comparar los estadios iniciales de un desarrollo con sus resultados superiores, pues los unos aclaran a los otros en los dos sentidos del recorrido.

Ahora bien, en el dominio del espacio, las relaciones entre el objeto conceptual, es decir, elaborado por el sujeto (ya sea un geómetra o un niño) y el objeto real, o sea, exterior al sujeto, son diferentes de lo que son en el plano de los conocimientos físicos y logicoaritméticos. El objeto físico es conocido por la experiencia y por los modelos explicativos que al respecto se da el sujeto, modelos construidos gracias a las operaciones lógicomatemáticas de este último, pero en tanto atribuidas a los objetos materiales en sí mismos, concebidos entonces como operadores. Pero ya se trate de la experiencia o de los modelos operatorios, el objeto exterior sigue siendo más rico que los objetos conceptuales; estos se acercan a aquel solo por aproximaciones sucesivas sin alcanzar el límite. El objeto lógicoaritmético es, por el contrario, un producto de las actividades del sujeto, y si bien los objetos conceptuales tales como un número o una clase pueden ser aplicados a objetos exteriores, estos no constituyen sin embargo ni números ni clases, sino que son simplemente enumerables o clasificables (del mismo modo que, valga la comparación, un pez puede ser comestible, pero sin que eso le afecte para nada (*) antes de que sea efectivamente pescado y comido).

En cuanto al objeto conceptual geométrico, corresponde como en física a objetos exteriores, pues una extensión, una superficie, una contigüidad, una curvatura o un *spin* existen como propiedades de los objetos materiales, pero el objeto conceptual es más rico (contrariamente al caso de la física) que el objeto exterior: entre la infinidad de geometrías posibles, solo algunas se realizan; y de las propiedades consideradas inmediatas tales como la indeformabilidad de un cuerpo sólido desplazado implican un alto grado de elaboración teórica.

Dicho esto, comprobamos, a partir de nuestras modestas observaciones sobre el juego del "pasador" que en él, desde los comienzos, la abstracción empírica está enmarcada por coordinaciones debidas a la abstracción reflexionante y que esta, reconocible por el hecho de que se dirige o apunta a la razón de las relaciones comprobadas e inserta esas relaciones en un sistema

(*) Pues esta propiedad de ser comestible expresa las relaciones entre la química del objeto y la del sujeto, y no la del objeto solo.

de composiciones "necesarias", prevalece cada vez más en los estadios sucesivos. Desde el estadio I hemos notado (en § 1) que si bien los sujetos comienzan por olvidar la necesidad de una casilla vacía para que haya desplazamientos, coinciden en considerarla "necesaria" ni bien comienza la acción. Pero para resolver los otros problemas permanecen todavía ampliamente dominados por la abstracción empírica de las formas, tamaños y posiciones percibidas en ese momento: de ahí su sorprendente incapacidad para imaginar los desplazamientos angulares, así como para prever la imposibilidad de hallar la solución en el caso de los modelos IIB y IIIC o de sus propias invenciones. En el nivel IIA hay un progreso de la anticipación con el descubrimiento de los desplazamientos angulares y el comienzo de la comprensión de su "razón"; después, generalización en el nivel IIB y, por último, solamente acceso a las composiciones "necesarias" con las reacciones a las soluciones imposibles. Esas son tres etapas esenciales de la abstracción reflexionante, y nos falta intentar explicarlas.

Esta forma de abstracción incluye, recordémoslo, dos momentos estrechamente vinculados: un "reflejamiento" del plano de la acción en el de la representación y una "reflexión" reorganizadora que reconstruye en el nuevo nivel lo que ha sido extraído del precedente agregándole el intento de comprensión de las razones, que son primero ocasionales y después necesarias. En cuanto a la anticipación, comienza con el reflejamiento, como previsión de la repetición de lo que ya es conocido en el plano de las acciones materiales y se amplía con la reflexión cuando esta incluye generalizaciones no simplemente extensionales, sino que se basan en la comprensión de las composiciones en situaciones análogas.

El primer problema es entonces el de la formación de los desplazamientos angulares. Los sujetos del estadio I pueden llegar a este paso por azar en el curso de variados tanteos, pero el descubrimiento rápido, aunque limitado, de los sujetos del nivel IIA no puede extraerse de esta sucesión de movimientos fortuitos. Es necesario, pues, admitir que, una vez que llegan a representarse (por reflejamiento) los diversos desplazamientos verticales y horizontales posibles, los sujetos extraen de su comparación una nueva relación, que consiste simplemente en una composición de los dos, o sea, un paso de uno a otro, puesto que lo propio de toda representación es permitir la fusión de lo sucesivo en un conjunto casi simultáneo. Ese es el comienzo del proceso que conduce de modo casi inmediato del reflejamiento a la reflexión.

Una segunda etapa es la de la generalización de los mismos desplazamientos angulares en el curso del subestadio IIB. En ese caso, se agrega la comprensión de la analogía de las situaciones y, por tanto, un progreso en la comprensión de la razón. Pero en la medida en que el descubrimiento, en el nivel IIA, de los desplazamientos angulares por paso de lo vertical a lo horizontal, o a la inversa, constituye ya una coordinación de acciones, es evidente que esta generalización es explicable por una abstracción reflexionante a partir de esta coordinación.

Queda el interesante problema de la tercera etapa (estadio III): la comprensión de la imposibilidad de ciertas soluciones, o sea, el acceso al carácter de necesidad de ciertas composiciones en sus condiciones a la vez

necesarias y suficientes. Ahora bien, en todo desarrollo operatorio la necesidad inherente a las composiciones de un sistema tiende a su cierre, es decir, al hecho de que las diversas relaciones que incluye estén todas reguladas y se engendren las unas a las otras sin salir de las fronteras ni recurrir a elementos exteriores. Desde este punto de vista, la diferencia entre los estadios II y III es clara: los sujetos del nivel IIB todavía consideran el desplazamiento angular solo de modo subjetivo o, por así decir, localmente necesario, en el sentido de que en tal o cual situación ellos están obligados a proceder así. Pues, como dice Man (en el § 2) "no podía hacerlo de otro modo, si no, no hubiera podido hacer subir el rojo"; pero cuando se trata de soluciones imposibles, no tienen la impresión de haber agotado todas las combinaciones y el mismo Man declara prudentemente: "no creo (poder resolverlo) pero voy a intentarlo, no puedo decir mucho de antemano", lo que equivale a admitir que no todo se puede deducir en el sistema. Los sujetos que pertenecen claramente al estadio III, en cambio, piensan con Mor (en § 3) que pueden agotar las combinaciones inherentes al dispositivo presentado, no en el sentido de todas las soluciones posibles, sino en el de todas las consecuencias de los desplazamientos elegidos en el punto de partida o de los efectos de bloqueos de los cuadrados pequeños cuya movilidad resultaría indispensable. Los sujetos alcanzan así el nivel de las deducciones necesarias en cuanto a la imposibilidad de obtener la solución cuando uno o dos rectángulos impiden las maniobras que se imponen y obstaculizan a todas.

En resumen, aunque todos los productos de la abstracción reflexionante corresponden a comprobaciones empíricas posibles, esta abstracción constituye una fuente de continuas novedades, en el sentido de que las comprobaciones proporcionan exclusivamente estados de hecho y generalizaciones extensionales mientras que la reflexión alcanza las razones y las composiciones necesarias. Así, no se limita a adelantarse a la experiencia por medio de anticipaciones deductivas, sino que la sobrepasa introduciendo en ella una necesidad que los hechos por sí mismos nunca incluyen.

Rotaciones y traslaciones

EN COLABORACIÓN CON J. DE LANNOY

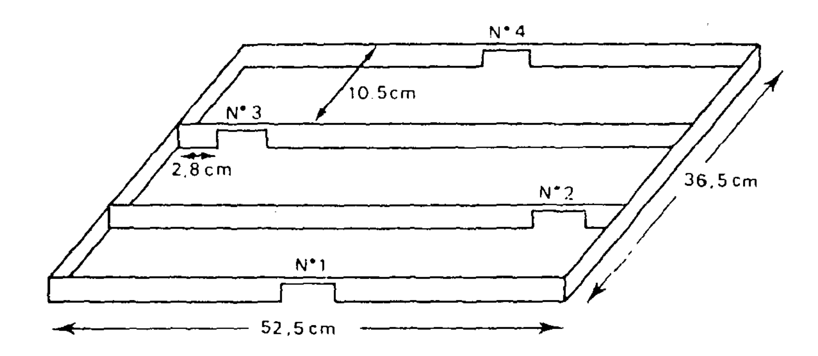
En el presente trabajo trataremos un problema en apariencia muy simple: la rotación horizontal de una tira de cartón invirtiendo el orden de los colores con los que está marcada en una de sus extremidades, y rotaciones con traslaciones de una escuadra para hacerla deslizar sin levantarla por las aberturas de las paredes de una caja con tres casilleros y cinco puertas. Pero como estas dos acciones son muy diferentes en sus contenidos, la abstracción de la función de la rotación en el momento en que se las compara no es inmediata y resulta interesante seguir sus etapas. (*)

Técnica: I. Se comienza por poner sobre la mesa un rectángulo largo de cartón, uno de cuyos extremos está coloreado, de izquierda a derecha, por tres tiras de color, una azul, otra roja y otra negra. Se la hace dibujar y después se pide un dibujo de previsión marcando los mismos colores cuando se haya hecho girar el rectángulo 180°. Se da vuelta el cartón y se compara el resultado con el dibujo, preguntando por qué los colores han cambiado de lugar, etcétera. Se hace dibujar también una escuadra tal como encuentre después de una rotación de 180°.

II. A continuación se pone delante del niño un cerco de madera de 52,5 × 36,5 cm que presenta tres colores; los paneles horizontales de este tienen puertas de 3 × 2 cm (fig. 1).

1) Delante de la puerta núm. 1 se ubica una escuadra (en el ángulo derecho) de 10 × 10 cm, con el vértice del ángulo haciendo frente a la puerta. Se hace observar al sujeto que esta escuadra se puede deslizar en todos los sentidos sobre la mesa: *a*) Se

(*) Se hubiera podido situar igualmente esta sección en las dedicadas al orden, porque los colores del cartón implican un orden serial como en los capítulos VIII-X. Pero aquí se ha puesto el acento en las rotaciones y, en el caso de la escuadra, estas solo involucran una permutación de las posiciones.



le pregunta al niño si, haciendo deslizar la escuadra sobre la mesa sin levantarla en ningún momento, se podría, partiendo de la primera puerta llegar más allá de la cuarta y por qué. *b*) Se le hace comprobar que la escuadra pasa la primera puerta, pero no la segunda, y se le pide la razón.

2) Se ubica delante de la puerta núm. 1 otra escuadra de ángulo recto de 3,8 × 10 cm (la longitud del lado grande de esta es inferior a la distancia que separa las paredes horizontales del cerco): *a*) Se le pregunta si haciendo deslizar la escuadra se podrán franquear las puertas y por qué. *b*) Se le hace comprobar al niño que la escuadra pasa por la primera puerta. *c*) Se le pregunta si habiendo pasado la primera puerta, la escuadra pasará las siguientes, y por qué. *d*) Después de la comprobación, se le pregunta al sujeto qué hubiera tenido que hacer para pasar de la segunda a la tercera puerta (traslación y rotación). *e*) Se pregunta por qué lado del ángulo (el grande o el pequeño) ha franqueado la escuadra la segunda puerta y por qué lado tendrá que pasar la tercera y por qué. *f*) Por último se le pregunta si, habiendo llegado más allá de la cuarta puerta, se podrá volver a llevar la escuadra a su punto de partida pasando de nuevo por las puertas y por qué.

III. Se le pregunta al niño si hay algo similar entre lo que acaba de hacer con la escuadra y *a*) lo que hizo con el cartón, *b*) en particular lo que ocurrió con los colores del cartón.

IV. Se pone delante del niño una reglita de 10 x 1,2 cm y una serie de escuadras de diferentes dimensiones; se le pregunta si se puede prever las que pasarán y las que no, y por qué, o bien cómo concebir una escuadra que pasara sin dificultad por todas las puertas y por qué.

§ 1 | EL ESTADIO I. — Los sujetos de un primer estadio (5-6 años) ya saben invertir el orden de los colores a propósito de la rotación del cartón, pero el problema de la escuadra presenta todo tipo de dificultades y el sujeto no percibe todavía la inversión necesaria del orden entre la segunda y la tercera puerta: en efecto, si la escuadra pasa la segunda puerta por el lado menor, hay que entrar entonces en la tercera por el grande, o inversamente, de lo cual los sujetos siguientes no dudan incluso en el caso de que logren la solución por tanteos:

RAN (5;2) dibuja sin demorarse el cartón invertido e indica el orden exacto de los colores, habiendo comenzado por el rojo. El dibujo de la escuadra, en cambio, es dado vuelta solo de modo incompleto en cuanto al paso de las puertas. Ran prevé que "*irá hasta el extremo*", pero "*el* (lado) *grande no se sabe*". Tiene éxito en la primera y en la segunda, pero fracasa en la tercera: "*No se sabe* (= no se puede) *pasar por allá.*" Después de nuevos intentos, se le propone una rotación, y acierta: "*Usted lo hizo así y yo lo hice así* (rotación). — ¿Crees que con la madera que dibujaste en la hoja y la madera que pasaste a través de las puertas has hecho algo que fuese similar? — *No.*"

MAR (5;2) resuelve la inversión de los colores del cartón y expresa la rotación diciendo que es "*la mitad la que ha caído en el medio* (= que parte en el otro sentido)". Para el dibujo de la escuadra comienza por el lado grande contra el borde opuesto de la hoja y le agrega el pequeño en el otro sentido, obteniendo una rotación por azar: "¿Cómo se hace para que el extremo pequeño esté hacia abajo? — *Porque no ha girado.*" En cuanto a las puertas, "*pasará la primera*" pero no las otras "*porque esa* (la segunda) *es más pequeña que esa* (la primera). — Mira bien. — *Son iguales*" Pero sigue considerando "*un poco más pequeña*" a la puerta donde ella fracasa, especialmente a la tercera: "Voy a dar vuelta (se le muestra). ¿Ahora cómo es? — *Más grande* (¡la misma puerta!). — ¿Cómo lo sabes? — *Porque hay un lado pequeño y uno grande* (de la escuadra)." A continuación "*hay que ir por los dos lados para ver si va por uno o por el otro*", pero no toma conciencia de las rotaciones y no ve ninguna relación con la del rectángulo de colores. No obstante, cree que es posible el retorno de la cuarta a la primera.

NAT (5;9) por el contrario, a quien le pregunta si piensa que el retorno es factible una vez franqueadas las cuatro puertas responde: "*No lo creo.*" Sin embargo comprueba que después de su fracaso en la tercera puerta el experimentador acierta "*porque usted giró*"; pero en cuanto a saber por qué el extremo pequeño no pasaba, "*no sabría decirlo*"; después, "*porque no se pueden pasar los dos lados*", pero al pasar del lado pequeño al grande "*es mucho más difícil*".

WES (5;6) del mismo modo: "*Es más fácil de este lado porque tiene un solo extremo pequeño.*" Pero cree posible pasar todas las maderas que se le ofrecen para elegir.

SAB (6;0) fracasa desde la segunda puerta al probar por el extremo grande; después: "*Es porque debía meter la punta allá* (extremo pequeño). A continuación, después de tanteos tiene éxito en la tercera al hacer "*pasar el extremo grande.* — Allá (segunda) ¿cuál extremo pasaste? — *El pequeño.* — ¿Y acá (tercera)? — *El grande.* — ¿Por qué? — *No lo sé.* — ¿Cómo se puede pasar la segunda puerta? — *Se puede pasar por los dos lados.* — ¿Y la tercera? — *También por los dos lados*". Pero no ve la alternancia y entonces se le hace notar: "pequeño, grande, pequeño, ¿no es así? — *Sí.* — ¿Siempre hay que hacer así? — *No.* — ¿Entonces, cómo? — *Uno se equivoca*".

El rasgo común de estas reacciones del estadio I es entonces que aunque se comprenda claramente la rotación del rectángulo con sus resultados sobre la inversión de los colores, los sujetos no conciben el paso de la escuadra a través de las puertas en términos de rotación, y ello por dos razones. La primera es que no anticipan ni los cambios de dirección que preceden a la introducción de una parte de la escuadra en la puerta, ni los que deberá

hacer a la salida para continuar el itinerario, ni incluso los que son necesarios para el hecho mismo de atravesar la puerta (puesto que al pasar uno de los extremos antes que el otro es necesaria una rotación de 90°): por tanto, solo consideran la posibilidad o la imposibilidad de un paso en términos de tamaños globales de la abertura en relación con uno de los lados de la escuadra como si allí existiera una relación simple, comparable a la de una caja y su contenido, y como si los factores direccionales no cumplieran ningún papel. A este respecto, Mar llega a considerar como no constante el tamaño de la puerta, la cual es considerada "más pequeña" en caso de fracaso y "más grande" en ocasión de un acierto. La segunda razón de esta negligencia de las rotaciones es que la de la escuadra es poco clara para los sujetos que fracasan con frecuencia en sus dibujos, y no siempre tienen conciencia de la rotación que efectúan en acción (cf. Mar "no ha girado").

En esas condiciones la rotación necesaria para pasar la tercera puerta después de la segunda naturalmente no es comprendida: Sab la nota pero sin creer en su necesidad, Nat ve también que se ha "girado", pero no comprende por qué, etcétera. Es evidente *a fortiori* que la comparación final entre la rotación de los rectángulos y la de la escuadra queda desprovista de significación. En efecto, al señalar el sujeto solo las diferencias entre los objetos utilizados sin ocuparse de las acciones, las abstracciones propias de este estadio I permanecen en el estado de comprobaciones mal interpretadas, y, por tanto, de abstracciones empíricas desprovistas del marco "reflexionante" que sería necesario para orientarlas y precisarlas.

§ 2 | EL SUB-ESTADIO IIA. — Este nivel se sitúa hacia los 7-8 años, con algunos sujetos más precoces y más o menos intermedios. Se caracteriza por una comprensión rápida del papel que cumplen las direcciones y por consiguiente de la necesidad de las rotaciones. En cuanto a la rotación que permite resolver el paso por la tercera puerta después de la segunda, los sujetos de nivel IIA la descubren pero sin la explicación ni la generalización necesarias:

STE (6;5) dice respecto de la segunda puerta: "*Se intenta hacerla girar* (lado del extremo grande) *para que pase.*" Ante la tercera puerta no puede avanzar "*porque aquí no es así*." (muestra el espacio, insuficiente para el extremo grande), *entonces se debe hacer así* (rotación)". Pero un instante después afirma que "*se pueden pasar los dos*" extremos por cualquier puerta y no sabe por qué tuvo que girar la escuadra en la tercera.

GIL (7;6) resuelve correctamente el paso por las cuatro puertas haciendo girar la escuadra cuando es necesario, y dice a propósito de la tercera: "*No va porque no está doblado así*"; después cambia de extremo precisando: "*Lo di vuelta.*" Pero para la sucesión segunda-tercera solo se puede saber "*cuando se ha probado*", si no, "*no se sabe bien*". Comparación entre el cartón de colores y el paso de la escuadra: "¿Hay algo semejante? — *Sí, porque se ha dado vuelta.* — ¿Y con los colores y los extremos grande y pequeño? — *Los colores son tan grandes como el extremo pequeño.*"

REN (7;4) no se descorazona frente a la tercera puerta "*porque se puede girar*", sino que piensa enseguida que se puede pasar la segunda y la tercera "*por el mismo extremo*". En cuanto a la comparación entre el rectángulo y la escuadra, se ha tenido que cubrir el primero de los colores y *ponerlos al revés: es casi lo mismo que girar*".

PAO (8;11) dice primero que no se pueden atravesar las puertas "*porque el rectángulo* (= el lado mayor de la escuadra) *es más grande que la distancia entre las dos paredes*", pero "*puede pasar de este modo* (rotación)". Pasa la segunda puerta con el extremo pequeño y hace el intento también con la tercera; después hace girar la escuadra comprobando que no se llega de otro modo. Pero a continuación prevé que se puede volver de la cuarta a la primera con el extremo grande "*porque así pasan los dos lados.* — ¿Siempre? — *Sí*". Para la elección de las maderas: "*No es el tamaño que veo*", olvidando las rotaciones. Comparación: hay analogías, "*sí, porque paso tres puertas y hay tres colores.* — ¿Y otra cosa? — *Usted hizo girar el cartón, y yo la barra*".

LEM (9;6) en su resumen recuerda muy bien que entre la segunda puerta y la tercera "*la hice girar*", pero se podría hacer "*todo en grande y todo en pequeño*".

El progreso cumplido por estos sujetos consiste en comprender enseguida que el propio paso de cada una de las puertas exige una rotación, porque la escuadra no puede entrar allí perpendicularmente. Pero lo que todavía falta es la evaluación de las posibilidades de maniobra en el espacio entre los tabiques que preceden a la entrada en la puerta o en el espacio ulterior que conduce a la puerta siguiente. Pao piensa claramente en ello al comienzo ("distancia entre las paredes") pero aleja la dificultad invocando las rotaciones. Centrándose así en un paso como tal, advierten que es necesaria una nueva rotación para atravesar la tercera puerta, pero no comprenden la razón de ello, por carecer de la coordinación entre los factores direccionales y dimensionales (y Pao al volver al factor de la dimensión en presencia de las maderas para elegir olvida entonces las rotaciones). Dicho de otro modo, lo propio de este nivel es el descubrimiento de la necesidad de las rotaciones, pero en relación solo con la puerta y sin referencia al espacio circundante. En cuanto a las comparaciones con la rotación del rectángulo de colores, esa inversión común es notada correctamente, pero no al margen de la concentración en el material, lo cual es paralelo a las formas de abstracción en las que permanecen estos sujetos, en parte empírica por comprobaciones sucesivas y en parte reflexionantes extraídas de la coordinación de las acciones necesarias para las rotaciones.

§ 3 | LOS NIVELES IIB y III. — Hacia los 9-10 años (con algunos casos de 8 y medio), se efectúan progresivamente las coordinaciones entre los factores dimensionales y direccionales, o entre las rotaciones y las traslaciones:

COR (8;10) piensa que no se puede franquear la tercera puerta "*a menos que se la ponga en otro sentido*", y en su resumen formula la sucesión: "*Allá el grande, allá el pequeño y acá* (tercera) *el grande.*" "*No hay manera de hacerlo de otro modo... es por los ángulos.*" Después precisa que es a condición de que "*que se llegue a hacerlo girar en esa parte* (parte del casillero anterior) *y que el extremo llegue primero hacia la puerta y el otro extremo en* (la siguiente)". Conclusión: "*Es necesario saber maniobrar los extremos*" en los espacios entre las puertas y en el paso de estas, "*que es lo importante*", y no su tamaño.

ALA (8;5): "*Se da vuelta siempre: aquí se comienza por el grande, allá por el pequeño, allá por el grande de nuevo*" ... "*pues el casillero es demasiado pequeño*

para la barra... en fin, los dos son de la misma extensión pero no se los puede girar (solamente) *metiendo la punta aquí, y girando así, así andará*".

SEN (9;5) nota la alternancia: "*primera por el pequeño, segunda por el grande,* etcétera. — ¿Y en el orden pequeño-grande-grande andaría? — *Debe ser posible si la separación de las planchas no es muy insuficiente... pero no tengo la posibilidad de girar así aquí en la tercera. Si lo hiciese girar, a mi entender, sería desviado así* (al espacio ulterior), *entonces podría continuar.*" En la elección de las maderas, Sen tiene en cuenta a la vez los ángulos y el tamaño de las partes en relación con los casilleros.

SCA (10;5): "*Porque allá* (segunda puerta) *hay lugar suficiente para cambiar la dirección mientras que aquí* (tercera) *no.*" Comparaciones: se ha dado vuelta la escuadra como el cartón, y "*el rojo queda siempre en el medio. Aquí va siempre* (= avanza sin rotación) *entre la tercera y la cuarta*".

Los sujetos del estadio III casi no difieren de los precedentes salvo en una cosa: notan que las condiciones dimensionales que limitan las maniobras entre la segunda puerta y la tercera y obligan a una rotación anticipada, están ligadas a la posición de esas puertas en relación con los tabiques exteriores de la derecha y después de la izquierda. Además, ven que sólo la inversión es necesaria, ya se haya entrado en la segunda por el extremo pequeño o por el grande, siendo la alternancia independiente de la elección absoluta del punto de partida:

CLA (11;1): "*Se puede ir* (a la segunda) *por los dos lados, pero se debe girar aquí; es necesario que* (el otro extremo) *esté a la izquierda para entrar... si se llega así* (sin rotación previa) *se queda detenido en el rincón. Si* (ese extremo) *está a la izquierda, no puede avanzar, pero si está a la derecha puede pasar.*" Entre las maderas para elegir tiene en cuenta estos diversos factores y elige los que "*pueden pasar porque el ancho* (el extremo pequeño) *es menos largo*".

GRO (11;7). Comparación: se hace girar la escuadra entre las puertas segunda y tercera como se hace girar el cartón, cuyos dos colores "*del extremo cambian, giran y el del medio permanece*" lo mismo que "*la segunda puerta permanece siempre en el medio*", y los extremos de la escuadra cambian de lado: el pequeño, el grande, "*después de nuevo el pequeño, después inmediatamente se vuelve allá*".

JAN (12;3). En la tercera, "*está demasiado en el borde: no hay modo de girar el ángulo. Cuando se está sobre el borde, está la pared, que molesta para hacer girar el ángulo de diversas maneras*", de ahí la necesidad de una rotación anticipada. En cuanto a la comparación con el rectángulo de colores: "*También se ha girado como si ese* (el extremo pequeño) *equivaliera al extremo coloreado y este a aquel extremo largo.* Pero en seguida Jan precisa: "*Se ha invertido* (rotación de dos dimensiones), *y lo que no está dado vuelta* (en el espacio). *Con los colores es lo mismo.*"

§ 4 | CONCLUSIONES. — Al término de esta evolución vemos que si la rotación del rectángulo con el extremo coloreado no presenta ningún problema, y eso desde el estadio I, las de la escuadra solo son comprendidas por etapas: realizadas en ciertos casos, pero sin intención ni toma de consciencia, en el estadio I, esas rotaciones se imponen en el nivel IIA, pero solo son interpretadas en función del paso mismo de las puertas, sin necesidad admitida entre la segunda y la tercera. En el nivel IIB esta necesidad poco a

poco es reconocida en función de una coordinación entre los factores direccionales y dimensionales, es decir, entre las rotaciones y las traslaciones en un espacio suficiente y en el estadio III el sujeto agrega precisiones acerca de las condiciones que resultan de la posición de las puertas.

Todos estos datos utilizados por el sujeto podrían ser extraídos de la simple observación de los objetos así como de las acciones materiales que le son adaptadas, y resulta entonces claro que, desde los estadios I a III la abstracción empírica cumple una función continua. Pero no es menos evidente que no se basta por sí misma y que requiere la intervención cada vez más activa de un marco asimilador extraído de la coordinación de las acciones del sujeto. Esta se manifiesta, en el caso de la escuadra, desde el nivel IIA con la generalización de las pruebas de rotaciones; después se extiende al nivel IIB con la constitución de un sistema de referencia concerniente al espacio de maniobra y se precisa por fin en el estadio III englobando todas las relaciones del sistema considerado en su conjunto.

En cuanto a la abstracción reflexionada que interviene en las comparaciones entre el rectángulo de cartón y la escuadra, no hay, para los sujetos del estadio I, ninguna semejanza, por no tener consciencia clara de las rotaciones: al querer insistir solo se obtienen indicaciones acerca de la diferencia de los objetos. En el nivel IIA, donde las rotaciones se tornan generales, aunque por tanteos, están bien indicadas como constituyendo el rasgo común a los dos tipos de problemas, pero es curioso comprobar que la toma de conciencia de la acción principal todavía está acompañada, en este estadio de los 7 y 8 años, por una característica que, en otras investigaciones, parece propia del estadio I, es decir, consideraciones acerca de los objetos utilizados en sí mismos y no solamente acerca de las acciones, o sea, una referencia a los contenidos y no únicamente a la forma de las operaciones efectuadas: "los colores son tan grandes como el extremo pequeño" de la escuadra, dice Gil, y "paso tres puertas y hay tres colores" declara Pao de casi nueve años: Estas analogías artificiales parecen indicar que la rotación aún no ocupa una posición central en el espíritu del sujeto. Lo adquiere en el nivel IIB, donde la comparación ya no se basa más que en sí misma, con correspondencias más o menos justificadas. Por fin, en el estadio III las correspondencias se precisan y Jan se entrega a un principio de pensamiento reflexivo, o reflexión sobre la reflexión, distinguiendo "invertir" y "dar vuelta", como Fré (12;5) en la sección IV del capítulo VII, que opone el orden necesario al que el sujeto puede introducir libremente en el ordenamiento de los objetos.

La rotación de una varilla en el nivel sensomotor

EN COLABORACIÓN CON C. MONNIER

En una obra acerca de la abstracción reflexionante es esencial dar un ejemplo de ese proceso en los niveles sensomotores, pues cumple un papel importante toda vez que una conducta nueva es extraída total o parcialmente de las coordinaciones anteriores entre las acciones del sujeto. En lo que sigue trataremos acerca del descubrimiento de una rotación parcial en el transcurso de ensayos surgidos del comportamiento del soporte.

El sujeto está de pie ante una mesa cuyos dos lados adyacentes *A* y *B* le resultan accesibles. Sobre la mesa hay una tira de madera terciada (por tanto muy flexible) de 88 x 3 cm y pequeño espesor, fijada por el medio en la mesa mediante un gancho alrededor del cual puede girar libremente. Se pone un juguete en el extremo de esta vara de madera, que en principio está colocada oblicuamente (a 45° entre *A* y *B*) y la tarea del sujeto consiste en atrapar el juguete (desplazándose como pueda, pero sin subirse a la mesa). Los niños examinados tienen por lo menos 10 meses y conocen ya el comportamiento del soporte: primero intentan tirar de la varilla hacia sí, y, al no poder, tantean de diversos modos hasta descubrir, alrededor de los dos años, la utilización de la rotación. Una experiencia de control consiste en ubicar el juguete a uno u otro lado del extremo de la varilla, lo que no resultaría eficaz en una situación de soporte (tirar el listón hacia sí), pero que puede dar lugar a éxitos por medio de las rotaciones

En lo que sigue llamaremos "mango" a la parte de la varilla situada entre el centro y el sujeto: no difiere en nada de la otra, salvo por su posición.

§ 1 | LOS TRES PRIMEROS NIVELES. — Un primer nivel se sitúa entre los diez y doce meses y se caracteriza por la ausencia de toda rotación:

los sujetos tiran del soporte o lo levantan (considerándolo como tal), golpean sobre la mesa o sobre la varilla, pero, en caso de rotación fortuita, no la saben utilizar. El segundo nivel es más interesante:

STO (1;1) está en *B* y tira del mango hacia sí, lo que desplaza el objeto hacia *A*. Va hacia *A* para alcanzarlo con la mano y, al no lograr el objetivo, tira de nuevo del mango, lo que hace que el objeto se dirija hacia *B*. Vuelve allí, procura en vano tomar el objeto con la mano, tira del mango y se desplaza hacia *A* para reiniciar sus infructuosas tentativas. Hace lo mismo diez veces seguidas, con paciencia, después Sto llora y se le da el objeto. Quince días después, presenta la misma conducta durante tres sesiones separadas.

MAR (1,1), la misma reacción ocho veces seguidas.

Es probable que estos sujetos comiencen, como los del primer nivel, por asimilar la varilla de madera a un soporte cualquiera del que simplemente pueden tirar hacia sí (*). Pero tirando del mango provocan una rotación parcial imprevista, y contrariamente a las reacciones del nivel I, la utilizan comprobando que ella desplaza el objeto al lado adyacente al suyo. Se limitan entonces a una rotación de 45° respecto de la posición oblicua inicial de la tira de madera: dicho de otro modo, se detienen cuando esa varilla está situada perpendicularmente al borde *A* o *B* donde ellos se encuentran, y el objeto está entonces frente a ellos. Entonces se desplazan ellos mismos hacia el lado adyacente, fracasan en su tentativa de tomar con la mano y recomienzan en el sentido inverso, etcétera.

El tercer nivel se caracteriza por la prolongación de las conductas precedentes, es decir por una continuación de la rotación hasta el momento en que el objeto se vuelve accesible a la mano en el costado de la mesa adyacente al que ocupa el sujeto:

MOL (1;2) tira del mango en *B*, ve que el objeto se dirige hacia *A*. Se desplaza hacia allí y fracasa en la prensión. Tira de nuevo del mango (quedándose en *A*) y mira atentamente los movimientos impresos al objeto (tres veces seguidas con vaivén): reinicia entonces el movimiento de rotación continuándolo más allá de los 45°, hasta que el objeto se aproxima lo suficiente al borde *B*: se dirige hacia allí y puede tomarlo con la mano.

CRI (1;10) reacciona del mismo modo, pero sin la tentativa inútil del comienzo de Mol: tira del mango, observa los movimientos así impresos al objeto y hace varios movimientos de vaivén para explorar; después continúa la rotación a más de 45° para ir a buscar el objeto sobre el lado adyacente...

IST (1;10): las mismas reacciones. Se ubica después el juguete al lado del soporte (a modo de control): ella reinicia sus intentos de vaivén y llega a una rotación completa de la varilla, con lo que el mango sirve entonces para empujar el objeto hacia el costado adyacente, adonde ella lo va a buscar.

(*) Notamos a este respecto que algunos sujetos permanecen allí pero son lo suficientemente fuertes para arrancar el soporte de su gancho: de ahí los aciertos inclasificables en nuestra escala de niveles, pero que de todos modos resultan poco interesantes para nosotros.

Los sujetos se dedican así a lo que en una ocasión anterior hemos llamado "reacciones circulares terciarias", dicho de otro modo, "experiencias para ver", que consisten en reproducir varias veces seguidas un mismo efecto interesante, como todas las reacciones circulares, pero variando los factores (idas y vueltas y amplitudes de la rotación): de ahí la comprensión del hecho de que se puede prolongar esta rotación más allá de 45° hasta hacer que el objeto sea accesible a la mano en el costado adyacente. En el caso de Ist, cuando se ubica el juguete un poco más acá de la barra, a modo de control, el sujeto llega a continuar la rotación hasta tomar con la mano el otro extremo de la varilla y servirse del mango para empujar el objeto hacia el lado adyacente de la mesa.

§ 2 | LOS DOS ÚLTIMOS NIVELES. — El cuarto nivel marca dos grandes progresos: una rotación completa de la barra de madera y la posibilidad para el sujeto de conducir de ese modo hacia sí el juguete sin tener que desplazarse él mismo. Pero estas novedades no surgen *ex abrupto* sino que son preparadas por conductas de transición. Un ejemplo de estas acabamos de ver con Ist, quien, para un objeto situado de este lado de la barra, llega hacer girar enteramente a ésta. Veamos otro caso intermedio:

SAR (1;11) está en *B* y comienza por querer alcanzar con la mano el juguete a partir de *B*, después desde *A*, y después vuelve a *B*. Entonces tira del mango, lo que conduce el objeto a *A*, pero esta vez ella ya no se desplaza y efectúa claramente un movimiento inverso empujando el mango hacia *A*, bastante lejos, para acercar sensiblemente a *B* el objeto deseado. Sin embargo, no llega a tomarlo, incluso desplazándose ella misma a lo largo de *B*. Después de diversos intentos vuelve a tomar entonces el mango y vuelve a poner el juguete en *A*, adonde lo va a buscar.

Veamos, por el contrario, casos claros del nivel IV:

MAR (1;9, el único de nuestros sujetos que vive con sus padres y no en una guardería infantil). Está en *A* y tira para sí del mango, lo que arrastra al objeto hacia *B*. Pero en lugar de dirigirse hacia allí, prolonga el movimiento en el mismo sentido de rotación, lo que conduce en un momento dado a empujar el mango alejándolo de lado en lugar de seguir tirando: resulta de ello que el objeto, pasando por *B*, termina por llegar a *A*, donde Mar lo toma sin desplazarse. En un segundo ensayo se repite inmediatamente esta conducta. En las experiencias de control con el juguete de uno u otro lado de la barra, Mar utiliza las mismas rotaciones completas.

HEL (2;4) tira del mango, después efectúa de primer intento una rotación completa que atrae el objeto hacia ella.

SAN (2;9) comienza con intentos de prensión directa, pero desde el momento en que toma el mango y comprueba los pequeños movimientos de rotación, los prolonga sin dudar tirando del mango, después volviendo a empujar de costado hasta la rotación completa del objeto que él toma en el mismo lugar.

Este descubrimiento de la rotación completa es interesante desde el punto de vista de la abstracción, pues se ven actuar en él dos factores que se apoyan uno y otro en los vaivenes de amplitudes variadas que intervienen en

las "experiencias para ver" del nivel III: por un lado, una anticipación de simples prolongaciones posibles de las rotaciones parciales observadas, pero también, por otro lado, una inversión de sentido en la acción misma del sujeto, que comienza por tirar la barra hacia sí (por ejemplo, sobre su izquierda) pero que, para prolongar la rotación, está obligado después a volverla a empujar al otro lado (sobre su derecha). En el sujeto intermedio Sar, este movimiento inverso en las acciones del sujeto precede claramente a la anticipación de la rotación completa, mientras que en Ist (nivel III antes del control) esta rotación completa es solo una prolongación no anticipada de las rotaciones parciales (pero también con una especie de inversión, aunque sin duda sin previsión, que consiste en invertir los papeles del mango y del otro extremo de la barra, estando el objeto situado al lado de esta y ya no sobre ella).

Por último, en el quinto nivel, esta inversión de la dirección en las acciones del sujeto se torna decisiva: después de haber comprobado que tirando la barra hacia sí aleja el objeto, el niño la vuelve a empujar hacia el lado contrario en el otro sentido, lo que impone una rotación que lleva el objeto hacia él (pasando por su posición inicial). Veamos algunos ejemplos comenzando por dos casos intermedios:

BEA (2;5) comienza con ensayos de prensión directa en A y en *B*, después sigue con los vaivenes de la barra variando las amplitudes. Tira del mango, hacia sí y, al comprobar que el objeto se aleja, vuelte a empujar la varilla hasta acercar el objeto y permitir la prensión. En un segundo intento, aleja enseguida el mango, pero esta conducta recién adquirida es tan poco estable que ella fracasa en las experiencias de control, sin tocar la barra.

CED (2;7) comienza con una rotación completa del nivel IV. Solo después de un segundo y un tercer intento vuelve a empujar el mango (pero en los dos casos inmediatamente) para imprimirle al objeto una rotación de sentido inverso en relación con el del primer intento. En las experiencias de control, cuando el objeto está del otro lado de la barra, tira del mango y, contrariamente a todo lo que precede, va a buscar el juguete en el lado adyacente de la mesa. Cuando el objeto está de este lado de la barra, comienza igualmente, después vuelve a empujar el mango y halla la conducta del nivel V.

SON (2;6) desde el comienzo empuja el mango para traer el objeto hacia sí. Pero en los controles permanece en las conductas del nivel III.

EUG (3;0) después de algunos vaivenes para ver, empuja directamente el mango.

Tres sujetos de 4;10 a 5;2 examinados en forma complementaria permanecen en este nivel V y, un caso con regresión a III como en Son en ocasión de los controles al lado de la barra.

§ 3 | CONCLUSIÓN. — Al querer extraer de esta evolución lo que ella nos enseña desde el punto de vista de la abstracción, se puede decir que se caracteriza por abstracciones empíricas primero enmarcadas y después cada vez más dirigidas por abstracciones reflexionantes. El primer problema es el de precisar cómo se impone la idea de rotación entre los niveles I y II. No

tenemos nuevos hechos para respaldar esto, pero una anterior observación de uno de nosostros (*) lo muestra claramente: cuando al tirar de un soporte de diferentes maneras, el sujeto lo hace girar un poco sin querer, registra ese rasgo observable así como los desplazamientos impresos al objeto deseado, y esto corresponde a las abstracciones empíricas así como las simples repeticiones de lo que acaba de verse. Pero para extraer de allí un comportamiento intencional de las rotaciones, aunque parciales, es necesario que esos rasgos observables sean asimilados a esquemas de acción más o menos bien coordinados: ahora bien, desde los 9-10 meses se encuentran esos esquemas en las conductas que consisten en dar vuelta a los objetos en todo sentido, y sobre todo en hacerlos girar 180° para encontrar su revés o su lado contrario. (**)

De un modo general, el paso de una rotación parcial observada en el objeto a una misma rotación de ciertos grados, pero intencional, supone una coordinación de acciones que, si bien imita lo percibido en la realidad (como la geometría científica de los griegos comenzó por imitar o por creer imitar la geometría de los objetos), agrega una parte de construcción activa que no conviene descuidar.

Solo que esta, que se manifiesta desde el nivel II, permanece primero muy limitada, porque solo alcanza rotaciones insuficientes tirando la varilla de madera solamente hasta el punto en que esta queda perpendicular, frente al sujeto, ubicando así al objeto en el lado adyacente de la mesa pero muy lejos del borde para que resulte accesible. Los numerosos intentos infructuosos de prensión directa que realizan Sto y Mar muestran suficientemente, por una parte, el carácter muy parcial de las rotaciones proyectadas y, por otra, la resistencia del sujeto a someterse a resultados negativos, o sea, a admitir los fracasos y a sacar provecho de ellos.

El nivel III marca entonces un doble progreso, en los dos sentidos de las abstracciones empírica y reflexionante. Repecto de la primera, está claro que la capacidad de prolongar un poco una rotación parcial constituye una especie de generalización extensional de los elementos observables percibidos por el sujeto cuando comienza a tirar del mango de la varilla, y esto queda en el plano empírico. Pero hay más, si se comparan los hechos del nivel III con los fracasos del II: hay una evaluación de la distancia entre el objeto y el borde de la mesa, o sea, la prensión posible; dicho de otro modo, interviene un juicio según el cual una distancia demasiado corta conduciría a un desacierto, sin que esto sea experimentado como en el nivel II, sino evitado y compensado por un prolongamiento de la rotación. A esto se agrega —y es fundamental— que esa compensación por aumento de recorridos de la barra implica un comienzo de inversión de sentido en los movimientos del sujeto: para llegar a su extremo, este después de haber tirado el mango hacia sí, es obligado a empujarlo un poco al otro lado, e Ist llega a invertir los papeles del mango y de la otra mitad de la varilla. Desde los ensayos exploratorios de vaivén el sujeto efectúa ya idas y vueltas, lo que representa un esbozo de inversión con el agregado de una observación de las distancias. Ahora bien,

(*)Piaget, *La naissance de l'intelligence chez l'enfant* (Delachaux), obs. 148 *bis* sobre Lau de 1;2.

(**) *La construction du réel chez l'enfant*, obs. 92 a 93 *bis* y 114-115.

todo esto, que es en resumen un juego complejo de compensaciones y de inversiones bosquejadas, implica coordinaciones que dependen de la abstracción reflexionante.

El papel de esta última aumenta notablemente en el nivel IV porque las rotaciones completas implican una inversión necesaria del sentido de la acción para conservar su dirección: tirar el mango de un lado, después empujarlo del otro. Esto corresponde además a la regla de todo movimiento circular que desciende de un lado para volver a subir del otro, pero, para llegar a realizarlo en lo que concierne al objeto, el sujeto debe invertir sus propios movimientos, lo que es tanto menos fácil o inmediatamente comprensible cuanto que debe alejar y elevar su mano y la barra de un lado para que el objeto se aproxime y descienda del otro.

Por último, pero sin olvidar no obstante una utilización indispensable y permanente de la abstracción empírica (contacto con los elementos observable), el nivel V marca el *maximum* de inversión de sentido de las acciones, porque el sujeto empuja enseguida la barra para traer el objeto hacia sí por el otro costado: parece entonces claro que esta coordinación nueva exige una parte notable de abstracción reflexionante, pues no se ve de dónde podría extraerse la capacidad de una inversión tal si no es de esas preparaciones graduales señaladas a propósito de los niveles precedentes.

En conclusión, la importancia creciente de la abstracción reflexionante entre los niveles I y V se manifiesta bajo la forma bastante sorprendente (puesto que todas esas conductas no son sino sensomotrices) de un progreso continuo en la capacidad de invertir el sentido de las acciones, o sea, si se lo desea expresar en términos lógicos, de compensar las acciones positivas con las negaciones correspondientes, o recíprocamente. A este respecto, el nivel I solo conoce las acciones positivas (tirar del soporte entero, levantarlo, etc.), y las compensaciones solo consisten en correcciones durante los tanteos. En el nivel II, donde comienzan las rotaciones parciales, las compensaciones adquieren una forma subjetiva que consiste en negar o no tener en cuenta los fracasos; priva, pues, todavía la afirmación de los éxitos alcanzados. Con el nivel III comienzan por el contrario las compensaciones sistemáticas; las distancias entre el objeto y el borde adyacente de la mesa son evaluadas como suficientes (+) o insuficientes (-), y esas son compensadas por una prolongación de las rotaciones parciales. Esta continuación exige a su vez un comienzo de inversión de los movimientos del sujeto: empujar un poco el mango del otro lado después de haber tirado de él. En el nivel IV, donde el sujeto permanece en su sitio y por tanto ya no compensa por medio de sus propios desplazamientos los del objeto que se aleja hacia el lado adyacente de la mesa, intervienen entonces inversiones claras: empujar la barra del otro lado después de haber tirado, o sea, alejar la barra para que el objeto se aproxime. En el nivel V la inversión es todavía más clara: consiste en orientar de primer intento la barra en dirección contraria a la de la aducción del objeto. En una palabra, hay un progreso de un extremo a otro en las compensaciones y en la inversión de las acciones, lo que implica coordinaciones que dependen de la abstracción reflexionante y que testimonian por ese mismo hecho un equilibrio entre la diferenciación de las subacciones, con los aspectos negativos que ella implica, y su integración en un esquema total coherente.

CONCLUSIÓN DE LA TERCERA PARTE

La toma de conciencia de las propiedades espaciales plantea un problema complejo por el hecho de que en ella la abstracción empírica nunca se basta a sí misma y tiene necesidad de un marco "reflexionante", como en el caso de las características físicas en general, pero recíprocamente, la abstracción reflexionante que se refiere a la coordinación de las acciones del sujeto exige constantemente, cuando no se trata de teoría pura (cuya verificación es reflexionante e intrínseca), sino de una representación de la realidad, el establecimiento de correspondencia con los productos de la abstracción empírica (y no pseudoempírica) que se refiere a los objetos y proporciona una información complementaria en cuanto a la significación de las deducciones efectuadas. Es en este segunto punto donde la abstracción espacial difiere a la vez de las abstracciones físicas y lógico aritméticas.

Como las primeras, se refiere a las propiedades que el objeto poseía antes de que el sujeto las descubriese en él: formas, dimensiones, posiciones, desplazamientos, etcétera. Pero la gran diferencia reside en que cuando el sujeto procura asimilar los caracteres dinámicos gracias a sus modelos deductivos, llega a ello solo aproximativamente, y la serie de esas aproximaciones quizás implique un "límite" que nunca puede ser alcanzado en sentido riguroso. Por el contrario, las características espaciales de los objetos son transparentes a la razón y esta las puede reconstruir deductivamente al punto de llegar casi a rectificarlas si cabe decirlo así: por ejemplo, los cristales se comportan como si tendieran hacia formas constructivamente perfectas, pero sin realizarlas íntegramente, o sea, como si en este caso el objeto obrara por aproximación en la dirección de los modelos teóricos, en lugar de ser al revés.

En cuanto a las relaciones entre las abstracciones espaciales y lógico aritméticas, su característica común es enriquecer los objetos con necesidades deductivas no dadas en los hechos como tales. Pero la diferencia reside en que los marcos logicoaritméticos tales como los números, las clases y las relaciones, las correspondencias, etcétera, que engendran esta necesidad, son añadidas a los objetos gracias a las operaciones del sujeto, mientras que los

marcos deductivos de naturaleza espacial reúnen las propiedades que los objetos ya poseían. Es así como una colección de cinco objetos se puede enumerar, igualar a cinco, etcétera, pero no contiene ese número como tal antes de ser enumerada (como tampoco, según ya hemos dicho, un pez comestible no por ese hecho ya está comido), mientras que aplicando las propiedades del círculo a una forma natural circular se reúne lo que esa forma ya contenía (y si es imperfecta como todas las figuras, el hecho de redondearla mejor con el pensamiento equivale a precisar su configuración y no a introducir una estructura que ella no podía poseer por falta de una actividad del sujeto, como en el caso de la numeración). (*)

En su doble naturaleza de extensión de los objetos y de geometría del sujeto, el espacio constituye desde el nivel sensomotor el punto de unión o zona de intersección entre la realidad exterior y las operaciones del sujeto: de ahí la particular unión que implica entre la abstracción reflexionante y la abstracción empírica, confiriendo la primera a las propiedades espaciales un carácter de necesidad y apoyándose la otra en el hecho de que esas propiedades existían en el objeto antes de que se tomara conciencia de ellas. La existencia de esta zona de intersección se manifiesta en particular de dos maneras.

La primera se vincula con las relaciones entre los aspectos figurativo y operativo (acciones y operaciones) del conocimiento. El primero de estos aspectos caracteriza a los elementos observables y el segundo a las transformaciones. Ahora bien, las operaciones logicoaritméticas no pueden ser figuradas salvo simbólicamente, como por medio de los círculos de Euler, etcétera, incluso en el caso de las seriaciones, donde se pueden ordenar en escalera varillas en forma tal que $A < B < C < \ldots$; en esta figura se trata solamente de una representación espacial que se debe al hecho de que la seriación se refiere a las longitudes, pero el encadenamiento como tal de relaciones asimétricas, transitivas y conexas $A > B > C \ldots$, no podría ser representado en sus propiedades generales. En cambio, en el dominio físico, los elementos observables están dados, pero han de ser sobrepasados, incluso muy ampliamente, para alcanzar las relaciones objetivas de las que solo manifiestan un aspecto muy parcial. El dominio espacial, en cambio, se beneficia con un doble privilegio: los elementos observables figurativos se insertan en él muy directamente en las transformaciones racionales, y esas mismas transformaciones son representables bajo una forma figurativa; de ahí esa mezcla de capacidad operatoria y de representación visual que los matemáticos han llamado "intuición geométrica". Ahora bien, si esta está sujeta a ciertas limitaciones (no se puede "dibujar" una curva de Jordan) o incluso a errores (las curvas que no implican tangente contradicen la intuición), sin embargo conserva todo su valor heurístico porque se adecua por aproximaciones. Es particularmente notable que todas las transformaciones que intervienen en los "grupos fundamentales" de las diversas geometrías pueden representarse

(*) Naturalmente, la geometría del sujeto puede sobrepasar (e incluso infinitamente, tanto en sentido propio como figurado) a la de los objetos: es el caso de los espacios de *n* dimensiones, de las varias geometrías no euclidianas (se puede inventar siempre una geometría tal que una línea irregular cualquiera sea en ella la recta), de las numerosas propiedades topológicas, etcétera.

figurativamente: el grupo de los desplazamientos se refiere a movimientos figurables, el de las similitudes en los cambios de dimensión que no provocan variaciones en las formas, lo que es doblemente perceptible, el de las afinidades en las correspondencias de direcciones, los grupos proyectivos en las correspondencias de puntos de vista y las homeomorfías en las correspondencias de partes continuas. En una palabra, la unión estrecha de lo figurativo y lo operativo es a la vez lo propio del dominio espacial y el índice de las conexiones específicas que implica entre las operaciones geométricas del sujeto y los elementos observables del objeto.

Un segundo conjunto de hechos es proporcionado por los datos psicogenéticos: si, en el nivel de las operaciones proposicionales, las operaciones logicoaritméticas están claramente disociadas del espacio, cuanto más se vuelve hacia las fuentes más indiferenciación hay entre lo espacial y la lógica. Los esquemas sensomotores implican ya una lógica, pero son indisociables del carácter espacial de las acciones. Las representaciones preoperatorias están impregnadas de adherencias espaciales: colecciones de figuras, número subordinado a la longitud de las hileras y que no se conserva cuando se las estira, etcétera. Las operaciones concretas, aunque alcancen el nivel de las deducciones válidas, permanecen en parte espaciales en la medida en que solo se refieren a objetos materiales y aún no a hipótesis proposicionales: las adiciones permanecen inseparables de los desplazamientos, las seriaciones están todavía vinculadas con las "buenas formas" figurativas, etcétera. Por otra parte, si la diferenciación entre lo espacial y lo logicoaritmético ha alcanzado un grado más alto que precedentemente, el isomorfismo de las primeras operaciones lógicas y de las operaciones infralógicas del mismo nivel testimonia un parentesco original.

Pero si bien el espacio constituye inicialmente un punto de unión entre las propiedades del objeto y las operaciones del sujeto, su evolución no es menos instructiva, pues aunque conservando su función fundamental de mediador, el espacio mismo se disocia en dos polos, y de una manera que prolonga en un sentido el papel cada vez más importante de la abstracción reflexionante (lo testimonian, desde los niveles elementales estudiados aquí, las soluciones progresivas de los pequeños problemas geométricos utilizados en nuestras experiencias).

En efecto, toda la evolución de la geometría es la de una formalización progresiva que disocia las formas operatorias de su contenido figurativo, mientras que la historia del espacio físico es la de una soldadura cada vez más estrecha entre ese contenido espacial y la dinámica en tanto contenido constituido por las otras propiedades de los objetos. En cuanto al primer aspecto de esta doble evolución, no es necesario recordar que la axiomática de Euclides no deja de ser intuitiva, ni por qué la geometría fue concebida durante tan largo tiempo como un simple estudio de las figuras, o sea, no como matemática pura sino aplicada a los datos de la percepción, mientras que con la teoría de los grupos fundamentales y los progresos de la topología, tiende hoy en día a reabsorberse en la teoría general de las estructuras. Por el contrario, el espacio físico que en Newton era considerado como una vasta forma, o sea, como un "continente" que englobaba todos los cuerpos, se vuelve, con Einstein, primero solidario de la cinemática, por la supresión de las fronteras entre continente y contenido, y, después, de la dinámica, por la

subordinación de las curvaturas a las masas. Por último, la geometrodinámica de Misner y Wheeler llega hasta la fusión completa (salvo en microfísica) de la dinámica y el espacio, lo que no desnaturaliza para nada sus características espaciales aun cuando le confiere a sus composiciones poderes de algún modo causales. En resumen, la "intuición" geométrica de los comienzos se ha disociado poco a poco en una formalización, en lo que se refiere a las operaciones del sujeto, cada vez más centradas en la forma, y en una física geométrica en lo que se refiere al contenido que reúne entonces los de la dinámica en general.

Una evolución de este tipo encierra dos enseñanzas. La primera es que el espacio conserva más que nunca su papel de mediador entre el sujeto y los objetos permitiéndole al primero asimilar de manera inteligible la diversidad de las manifestaciones de los segundos. El éxito cada vez mayor de las estructuras de los grupos en física es un índice impresionante, porque esos grupos encarnados en lo real conllevan siempre componentes espaciotemporales. Pero, en segundo lugar, esta incorporación progresiva de lo real al espacio (y las transforamciones de la microfísica dejan entrever que se trata de variedades múltiples de espacios) está acompañada, en el seno de las actividades del sujeto, por una asimilación recíproca y cada vez más estrecha entre las estructuras geométricas y las estructuras algebraicas, o sea, por una integración operatoria cada vez más profunda.

Por lo tanto, no resulta sorprendente que desde los niveles elementales estudiados en esta obra las reacciones a los problemas geométricos presentados a los sujetos tengan las tres características siguientes. En primer lugar, testimonian inicialmente una primacía provisional de la abstracción empírica, pero enmarcada desde el comienzo por los esbozos de una abstracción reflexionante que adquirirá cada vez mayor importancia en el curso de los estadios siguientes: así, los movimientos de la bala suspendida (cap. XIII) o la construcción de las diagonales (cap. XIV), etcétera, solo son comprendidos después de muchos esfuerzos y exigen un juego cada vez más complejo de abstracciones reflexionantes. En segundo lugar, el sujeto tiende a verificar en todos los niveles la convergencia entre los productos de sus abstracciones reflexionantes y las propiedades del objeto, mientras que la abstracción empírica que proporciona el conocimiento de estas se afina cada vez más por las coordinaciones inferenciales reflexionantes. Hay allí una reacción doble que es natural por el hecho de que las propiedades espaciales del objeto están dadas en este antes de que el sujeto llegue a reconstruirlas deductivamente; de ahí la necesidad de control, y después, cuando las inferencias comienzan a anticipar las comprobaciones, la necesidad de un mejoramiento de estas. Tales diversas conductas pueden ser notadas en particular en la investigación acerca de los desplazamientos de las referencias en las piedras y la oruga del capítulo XV.

En tercer lugar, hemos notado que, tanto en el dominio espacial como en lo que concierne a la noción de orden, la abstracción reflexionada comienza por estar en retraso respecto de lo que produce el proceso de la abstracción reflexionante como tal; después alcanza el mismo nivel (habitualmente en el subestadio IIB de las operaciones concretas) y finalmente es fuente de progreso al engendrar reflexiones sobre las reflexiones; dicho de

otro modo, un comienzo de pensamiento reflexivo y ya no solo reflexionado. Especialmente la búsqueda del perímetro y la superficie de los rectángulos ha conducido a tales comprobaciones, al permitir el pensamiento reflexivo que el sujeto hallase la razón de las observaciones precedentes (incompatibilidad de las dos conservaciones simultáneas).

CONCLUSIONES GENERALES

Al término de estas investigaciones quedan aún por extraer los resultados acerca de la naturaleza de la abstracción reflexionante y, sobre todo, de su fecundidad en tanto es uno de los motores del desarrollo cognitivo y uno de los aspectos de los procesos más generales de la equilibración.

Recordemos primero nuestras definiciones. La abstracción "empírica" extrae sus informaciones de los objetos como tales o de las acciones del sujeto en sus caracteres materiales, o sea, en general, de los elementos observables, mientras que la abstracción "reflexionante" se refiere a las coordinaciones de las acciones del sujeto, pudiendo esas coordinaciones y el proceso reflexionante mismo permanecer inconscientes o dar lugar a tomas de conciencia y conceptualizaciones variadas. Cuando el objeto ha sido modificado por las acciones del sujeto y enriquecido con las propiedades extraídas de sus coordinaciones (por ejemplo, al ordenar los elementos de un conjunto), la abstracción que se refiere a esas propiedades es llamada "pseudoempírica", porque, actuando sobre el objeto y sobre sus elementos observables actuales, como en la abstracción empírica, las comprobaciones alcanzan en realidad a los productos de la coordinación de las acciones del sujeto: se trata, pues, de un caso particular de la abstracción reflexionante y no de un derivado de la abstracción empírica. Por último, llamamos abstracción "reflexionada" al resultado de una abstracción reflexionante, cuando se ha tornado consciente, y ello ocurre independientemente de su nivel.

Recordemos también que la abstracción reflexionante involucra siempre dos aspectos inseparables: por un lado, "reflejamiento", es decir la proyección (como con un reflector) sobre un nivel superior de lo que es extraído del nivel inferior (por ejemplo, de la acción a la representación) y, por otra parte, una "reflexión" en tanto acto mental de reconstrucción y reorganización sobre el nivel superior de lo que es transferido de este modo desde el inferior.

I / EL REFLEJAMIENTO

El primer problema es, pues, el de los grados y la naturaleza de los "reflejamientos". Varias de las investigaciones que hemos realizado nos han permitido separar los siguientes niveles, que parecen muy generales. El

reflejamiento más elemental que vamos a considerar aquí (*) es el que conduce desde las acciones sucesivas a su representación actual, o sea, de un movimiento sensomotor a un comienzo de conceptualización que lo engloba, así como a sus predecesores cercanos (por ejemplo, cuando un sujeto dice: "ahora pongo una amarilla", en una serie de fichas donde aquella va después de una roja). El segundo nivel es el de la reconstitución (con o sin relato) de la serie de acciones, desde el punto de partida a su terminación, y que consiste en vincular las representaciones en un todo coordinado. El tercer nivel es el de las comparaciones, donde la acción total así reconstituida es comparada con otras, análogas o diferentes. En varios capítulos precedentes, las comparaciones fueron objeto de una pregunta específica, lo que introduce una especie de hecho artificial, pero es evidente que en la vida corriente las comparaciones pueden ser espontáneas y muchos sujetos las hicieron por sí mismos antes de que se le preguntara al respecto. Una vez que, por medio de esas comparaciones, se desprenden las estructuras comunes o no comunes, comienzan un cuarto nivel, después nuevos niveles de reflejamientos, caracterizados por "reflexiones" sobre las reflexiones precedentes y que culminan finalmente en diversos grados de "metarreflexión", o de pensamiento reflexivo, que le permite al sujeto hallar las razones de conexión hasta aquí simplemente comprobadas (cf. en el cap. XII el sujeto Cla que descubre, a los 11;5, que las conservaciones respectivas del perímetro y de la superficie de un rectángulo no pueden ser aseguradas simultáneamente). Resulta claro que a partir de estas reflexiones a la segunda y a la enésima potencia, lo esencial para a ser la reflexión en sí misma, por oposición al "reflejamiento". Pero no es menos evidente que, psicológicamente, cada nueva reflexión supone la formación de un nivel superior de "reflejamiento" donde lo que permanecía en el nivel inferior como un instrumento al servicio del pensamiento en su proceso, se convierte en objeto de pensamiento y es entonces tematizado en lugar de quedar en estado instrumental u operativo: por ejemplo, reflexionar sobre la adición, después de haberse servido simplemente de ella, transforma el proceso aditivo en nuevo objeto del pensamiento (cf. cap. II, acerca de los múltiplos comunes donde el sujeto después de haber sumado n vecés x llega a considerar el número n de operaciones y no solamente el aumento de los x. Sin cesar se construyen entonces nuevos niveles dé "reflejamientos" para permitir las nuevas "reflexiones", y es eso lo que muestra toda la historia de las matemáticas en sus tematizaciones sucesivas hasta sus fases actuales.

En cuanto a la naturaleza de esos reflejamientos, solo se trata inicialmente de un desplazamiento de los elementos observables en función de su conceptualización progresiva por toma de conciencia, o sea, interiorización de las acciones. Pero en un sistema de conceptos, es necesario distinguir dos aspectos: su forma y su contenido. Ahora bien, si este solo puede estar

(*) No se trata de decir que no lo haya en los niveles sensomotores, porque se observan en él abstracciones reflexionantes (cap. XVIII). Esos reflejamientos prerrepresentativos están entonces constituidos por los niveles de reconocimientos, de utilización de índices, de anticipaciones, etcétera, sobre las cuales se reflejan las acciones o coordinaciones anteriores.

constituido por los elementos observables, que dependen de la abstracción empírica, su forma, que consiste en reunir los objetos en un todo apoyándose en las relaciones de equivalencia en función de sus cualidades comunes, supone la intervención de una abstracción reflexionante: esta, a partir de la asimilación sensomotriz de los objetos a un esquema (sin conciencia de su extensión). permite pasar a la asimilación de esos mismos objetos entre sí, lo que es constitutivo del concepto en tanto clase. Se ve así que la primera variedad de reflejamiento distinguida en el momento supone ya una abstracción reflexionante como reflexión, pero que se refiere a una "forma" muy elemental (formación de conceptos), generalizable a cualquier contenido, y que permite el reflejamiento de los elementos observables conceptualizados. Los niveles siguientes (reconstituciones y después comparaciones entre situaciones análogas) implican una parte muy grande de abstracción como reflexión (en cuanto a esas "formas" que representan el establecimiento de un orden de sucesión o de relaciones cada vez más complejas), pero cuya generalización permite de nuevo el reflejamiento de los observables precedentes sobre nuevos niveles. Esta unión de la reflexión y el reflejamiento es, pues, esencialmente formadora de los niveles sucesivos, y no solo fuente de los traslados (proyecciones) o generalizaciones que conducen de uno a otro. Precisemos además que cada nivel nuevo implica una diferencia cualitativa además de una diferencia de grado.

En efecto, la formación de cada uno de estos niveles involucra a su vez nuevas "reflexiones", porque se trata de reconstruir en el nuevo plano lo que es desplazado o proyectado a partir del precedente: por ejemplo, la coordinación de dos acciones no es de la misma naturaleza que la de sus representaciones conceptualizadas, lo que exige una reconstrucción. Hasta aquí asistimos a un proceso en espiral: todo reflejamiento de contenidos (observables) supone la intervención de una forma (reflexión) y los contenidos así transferidos exigen la construcción de nuevas formas debidas a la reflexión. Hay así una alternancia ininterrumpida de reflejamientos ⟶ reflexiones ⟶ reflejamientos; y (o) de contenidos ⟶ formas ⟶ contenidos reelaborados ⟶ nuevas formas, etcétera, de dominios cada vez más extensos, sin fin ni, sobre todo, comienzo absoluto. (*)

Los propio de esta espiral es, de tal modo, llegar a formas cada vez más ricas y, en consecuencia, más importantes en relación con los contenidos. En cuanto a estos, la riqueza creciente de las formas (sobre la que volveremos enseguida) involucra un resultado doble: un afinamiento progresivo de las abstracciones empíricas, provistas de nuevos instrumentos de asimilación, y una formación cada vez más extendida de abstracciones pseudoempíricas, porque los objetos son revestidos de propiedades cada vez más numerosas introducidas por las "reflexiones" del sujeto. De ahí resulta que, en los niveles superiores, es la reflexión la que conduce cada vez más el juego en relación con los reflejamientos, que se reducen entonces a tematizaciones

(*) Recordemos que los contenidos que, en los estadios elementales, son ante todo elementos observables, pueden estar constituidos, en las series, por las formas: son los casos, cada vez más numerosos, en que se construyen formas de formas, donde estas son entonces los contenidos de aquéllas y dan lugar a abstracciones "pseudoempíricas".

(operaciones que se convierten en objetos de pensamiento), mientras que en los niveles inferiores eran los reflejamientos los que constituían el motor esencial. En otros términos, el desarrollo de la abstracción reflexionante implica la construcción de formas cada vez más numerosas en relación con los contenidos, pudiendo esas formas dar lugar ya sea a la elaboración de las estructuras logicomatemáticas, ya sea a las "atribuciones" hechas a los objetos y a sus conexiones en que consiste la explicación causal en física.

En cuanto a las abstracciones reflexionadas, se ubican en los diferentes niveles de reflejamiento, de las que constituyen en cada caso un sector privilegiado que da lugar directamente a una posibilidad de nuevas reflexiones. Pero conviene señalar su evolución en relación con la de las abstracciones pseudoempíricas. Estas últimas cumplen una función fundamental en los niveles elementales, y que sigue siendo muy importante durante todo el estadio de las operaciones "concretas", en la medida en que el sujeto, para efectuar una composición operatoria (y *a fortiori* preoperatoria) y para juzgar sus resultados, tiene necesidad de verlos encarnados en los objetos: la abstracción pseudoempírica sirve entonces de soporte y de auxiliar esencial para las abstracciones reflexionantes. Esto no excluye naturalmente la formación de múltiples abstracciones reflexionadas en los resultados de esos procesos, pero acaso con un cierto desplazamiento. Por el contrario, en la medida en que con el progreso de la abstracción reflexionante el pensamiento llega a distanciarse de esos apoyos concretos, o a dominarlos desde más arriba, la abstracción reflexionada cumple una función cada vez más importante hasta llegar a ser, en el nivel de las operaciones "formales", coextensiva en ciertos casos del proceso mismo de los reflejamientos y las reflexiones. Sin excluir para nada su posible coexistencia, la evolución de las abstracciones pseudoempíricas y reflexionadas se caracteriza, pues, por esta inversión de sus proporciones: las primeras pierden su valor relativo (sin desaparecer nunca, por lo demás, incluso en el hombre de ciencia), mientras que las segundas acrecientan el suyo (sin estar ausentes, empero, en los niveles elementales).

II / LA CREACIÓN DE NOVEDADES PROPIA DE LA ABSTRACCIÓN REFLEXIONANTE

Interpretada de este modo la formación de los reflejamientos, se trata de abordar el problema principal, que es el de la creatividad propia de la reflexión, o sea de la riqueza creciente de las "formas" que engendra la abstracción reflexionante.

Recordemos una vez más, pues permanentemente se lo olvida, que todo nuevo reflejamiento exige una reconstrucción en el nivel superior de lo dado en el precedente. Esta reconstrucción es, ciertamente *necesaria*, porque las relaciones entre las mismas acciones *A, B, C,* etcétera, no son idénticas según se trate de acciones materiales que se suceden paulatinamente con olvido de las precedentes, de una representación que las acompaña, pero vinculándolas antes unas con otras, de un relato que las reconstruye, etcétera.

Si los elementos *A, B, C,*... pueden permanecer iguales desde el punto de vista del observador, sus conexiones no le exigen tampoco instrumentos diferentes y nuevos en cada oportunidad cuando se trata de reconstruirlos: la representación agrega cierta simultaneidad allí donde las acciones son sucesivas, el relato supone un orden activamente reconstituido mientras que el orden de sucesión de las acciones sería inconsciente, etcétera. Estos enriquecimientos progresivos se pueden clasificar entonces del siguiente modo:

1) La abstracción reflexionante es ya de por sí una especie de operación, que sale de su contexto para retener ciertas coordinaciones y descartar el resto. La abstracción empírica también lo es en un sentido, pero en menor grado, porque se limita a elegir, entre los elementos observables perceptibles, los que responden a una pregunta determinada, mientras que la abstracción reflexionante implica una actividad continua, que puede mantenerse inconsciente, comenzando por las coordinaciones a las que se refiere, pero cuyas realizaciones conducen, a partir de cierto nivel, a tomas de conciencia complejas. El primer resultado de las abstracciones reflexionantes es pues producir ya sea la diferenciación de un esquema de coordinación para aplicarlo de modo nuevo, lo que aumenta las posibilidades del sujeto (véase el ejemplo sensomotor del capítulo XVIII), ya sea la "objetivación" de un proceso coordinador que se convierte entonces en objeto de representación o de pensamiento, lo que acrecienta los conocimientos del sujeto ampliando el campo de su conciencia y enriqueciendo su conceptualización.

2) Incluso si la coordinación así transferida, por reflejamiento, del plano de acción al de la conceptualización es la misma, ese reflexionamiento engendra un nuevo morfismo o correspondencia entre la coordinación conceptualizada y las situaciones prácticas en las cuales la acción coordinada se repite. Ahora bien, hay una construcción más efectiva de lo que parece, pues (ya lo vimos en las series de investigaciones anteriores) (*) la toma de conciencia está sujeta a múltiples deformaciones y su ajuste puede ser bastante dificultoso. Si nos atenemos a los problemas estudiados en esta obra, el orden de un relato está lejos de corresponder automáticamente al de las acciones así descriptas y la reconstrucción que exige implica un esfuerzo inferencial nada despreciable (véase, por ejemplo, la corredera del cap. XI) o sea, una construcción en parte nueva.

3) La noción de orden, en todas sus formas, constituye así un ejemplo particularmente notable de construcción debida a la abstracción reflexionante pues, como ya se dijo, incluso para comprobar empíricamente la existencia de un orden en una serie de objetos (por ejemplo una serie de árboles a lo largo de un arroyo) es necesario utilizar acciones que implican ellas mismas un orden (desplazamientos de la mirada o del cuerpo, etcétera.). Ahora bien, de esos esquemas de orden se extraen, en el nivel preoperatorio, estructuras de carácter general que no hemos mencionado en esta obra, pero

(*) Véase nuestra obra colectiva *La prise de conscience* (col. "Psychologie d'aujourd'hui", P.U.F.).

que es necesario recordar aquí en su carácter de construcciones nuevas debidas a su vez a abstracciones reflexionantes, y de un nivel superior a los precedentes. Son, en primer lugar, las estructuras de cuantificación ordinal (pero aún sin métrica ni evaluación de las extensiones de clases) basadas en el orden de los puntos de llegada (superación de una longitud, como si más lejos fuera igual a más largo, o de un movimiento en relación con otro, etcétera). Y después es la idea de función como dependencia orientada (por ejemplo en el cap. IV el hecho de que el medio de una serie es función de su alargamiento, etc.). En tanto covariación, la función no parece deberse más que a abstracciones empíricas, pero en ella hay algo más que ese juego de variaciones observables solidariamente: existe la noción de una dependencia y también, en general, de sentido único (una "pareja ordenada" según una de sus definiciones, o una "aplicación") que, ya lo hemos visto en otra parte, (*) no basta por sí misma para engendrar la reversibilidad. (**) Ahora bien, es difícil concebir la relación de dependencia ordenada como si fuera extraída de una fuente distinta de la coordinación de la acción propia, pues los elementos observables físicos solo proporcionan variaciones que se pueden vincular de diferentes maneras. La función parece ser el puente entre los dos esquemas de orden inherentes a las relaciones asimétricas y a las de implicación significante que trataremos en 5) y que son aplicables a todos los conceptos en cuanto a la comprensión.

4) Otra novedad interviene desde el momento en que la conceptualización consciente de las coordinaciones en juego provoca comparaciones con otras coordinaciones análogas, pero que no constituyen simples repeticiones de la primera en nuevas situaciones. La distinción puede parecer sutil entre una misma coordinación con simple cambio de contenido, y una coordinación análoga en un problema distinto, pues para el observador centrado en las estructuras hay identidad. Pero ya hemos visto en muchos ejemplos, cómo el sujeto, a pesar de los relatos correctos de los dos tipos de acciones reunidas, experimenta dificultades en compararlas: inicialmente la comparación lleva solo a distinguir las diferencias de contenido; procede después a establecer correspondencias en las acciones (nuevos morfismos), y solo tardíamente se centra en las analogías de estructura: en la práctica, nada muestra mejor la realidad operativa y la constructividad propias de la abstracción reflexionante, que la multiplicidad y la lentitud en la sucesión de estas etapas que en general llegan bastante tardíamente a las abstracciones reflexionadas necesarias para tales comparaciones.

5) Estas comparaciones conducen entonces, en ciertos casos, a la abstracción de estructuras cualitativas comunes bastante generales para servir a la solución de problemas de una gran variedad. Un buen ejemplo es el de la utilización de índices polivalentes, con explicitación de las "implicancias significantes" en juego en los datos: "Si x, entonces y o z", etcétera. Pero esta

(*) Véase el vol. XXII de los "Etudes".

(**) Recordemos la distinción entre lo reversible con simple retorno al punto de partida sin compensación y lo reversible con retorno pasando paso a paso por el mismo camino y con compensaciones.

estructura inferencial, cuya precocidad y generalidad (*) hemos mostrado en el capítulo V, sigue siendo cualitativa y no sale del ámbito de la "comprensión", a pesar de las relaciones de extensión que intervienen en ella implícitamente sin poder ser separadas por el sujeto.

6) La etapa siguiente marca un progreso sensible en la constructividad, cuando no se lo sospechaba: es la generalización de las negaciones o inversiones, mientras que la tendencia inicial se caracteriza por una primacía sistemática de las afirmaciones o de los caracteres positivos: tal como se lo ha desarrollado en otra parte, (**) los elementos observables inmediatos solo son positivos pues no se percibe un aspecto negativo, o sea, la ausencia de una propiedad, sino por referencia a una anticipación no confirmada. Por otra parte, en las estructuras en comprensión a las que se acaba de hacer referencia ("si x entonces o y o z" etc.), las propiedades y o z no son definidas por negaciones (y = *no*-z) sino por sus cualidades positivas con conciencia de la "diferencia", que engloba una negación implícita, pero precisamente, implícita y aún no hecha explícita ("la lógica sin negaciones" de Gris no se refiere a otra cosa). Interviene entonces un proceso muy notable de abstracción para pasar de la relación "y diferente de z" a la negación parcial "los portadores de y poseen el carácter x pero no el carácter z", lo que permitirá la construcción de clases y subclases B (x) = A (Y) + A' (z), de donde "A" = las B *no*-A". De igual modo en las seriaciones conocemos desde hace tiempo la dificultad de coordinar un orden directo $A < B < C < \ldots$ con su inverso $C > B > A$. La negación exige, pues, muy efectivamente una construcción nueva, pero extraída por abstracción reflexionante de las relaciones cualitativas (comprensión) de las diferencias. (***)

7) La construcción por abstracción de la negación, en el plano de las formas, y no solo de los contenidos empíricos (esperas frustradas o previsiones desmentidas), conduce entonces a una nueva etapa fundamental de constructividad que es la cuantificación de las extensiones (estas son descubiertas desde la representación, pero todavía no están regladas cuantitativamente), en lo que se refiere a las clases, y de las diferencias en el caso de las relaciones asimétricas y de las seriaciones. En efecto (cap. V), para considerar que

(*) Es necesario destacar que las implicaciones significantes en sí (es decir independientemente de las alternativas mencionadas aquí) son todavía más precoces y comienzan a partir del establecimiento de relaciones entre significaciones.

(**) Véase *Recherches sur la contradiction* ("Eéudes", vol. XXXI y XXXII).

(***) Hemos asistido, desde los niveles sensomotores (cap. XVIII) a la construcción de las primeras negaciones (§ 3), pero es evidente que en los niveles de la representación, deben reconstruirse conceptualmente. De todos modos existen situaciones en las que, sin que el sujeto tome conciencia, cada nivel se caracteriza por la negación del carácter que se mantuvo positivo en el nivel precedente: véase el capítulo XIV, donde los desplazamientos verticales y horizontales de las T son primero sucesivos y después simultáneos; en este último caso, son inicialmente fuerzas (velocidades) iguales y después desiguales, pero todavía constantes y, por último, variables. Cada nivel se caracteriza por un complemento en negativo de una condición positiva que limitaba las posibilidades de acción. En cada uno de estos casos, la negación se traduce en la conciencia como una simple diferencia, pero es la única posible según la dimensión considerada (sucesión, igualdad de velocidades y después su constancia), lo que equivale entonces a una negación.

B > A (en la inclusión de una subclase *A* en *B*), es necesario ser capaz de la sustracción *B* - *A*' = *A*, porque la operación directa B = A + A' no es suficiente por no conservar el todo *B* cuando se lo subdivide. Dicho de otro modo, la cuantificación (naturalmente, con las operaciones numéricas y métricas a continuación) es extraída por abstracción de las composiciones de operaciones directas e inversas, tornándose posible esta reversibilidad solo con la generalización o la abstracción constructiva de las negaciones. Ahora bien, éstas distan mucho de ser captadas de modo inmediato y precoz, mientras que su correspondencia sistemática con las afirmaciones es necesaria para asegurar la reversibilidad operatoria.

8) Con la construcción de las cuantificaciones y de la reversibilidad se hace posible la formación de las estructuras operatorias "concretas" en su conjunto, incluyendo las conservaciones que su reversibilidad impone y su capacidad de realizar composiciones deductivas. Esas estructuras, en tanto logicomatemáticas, evidentemente son extraídas de las actividades del sujeto. En el nivel en que ellas se forman es necesario, además, señalar que, sin duda bajo su influencia, la abstracción "reflexionada", cuya constitución estaba con frecuencia retrasada con respecto de la acción de los procesos "reflexionantes" (especialmente en las "comparaciones") comienza a reunirlos y, a partir de allí, a servir de punto de partida o de trampolín para nuevas construcciones.

9) En efecto, una vez formadas las estructuras propiamente operatorias, se tornan posibles las reflexiones sobre las reflexiones anteriores; (*) dicho de otro modo, la construcción de operaciones sobre las operaciones. Actuantes ya en el desarrollo de los sistemas métricos y en los de las coordenadas, estas operaciones a la segunda o a la enésima potencia se transforman en regla en el nivel de las operaciones hipotéticas deductivas o formales donde comienza una "metarreflexión" sistemática, dicho de otro modo, la elaboración de un pensamiento reflexivo que procede por hipótesis y relaciones necesarias entre ellas y sus consecuencias.

10) Debe señalarse una última forma de actividad creadora propia de la abstracción reflexionante, que comienza con las operaciones mencionadas en 8) pero considerablemente reforzada por los poderes de la metarreflexión: es la capacidad de separar las "razones" de las coordinaciones utilizadas hasta allí sin justificación intrínseca. Esta búsqueda de la razón de las cosas (razones lógicas para las coordinaciones operatorias y razones causales cuando son atribuidas a los objetos) constituye sin duda la diferencia más profunda que opone la abstracción reflexionante a la abstracción empírica.

(*) En todos los niveles se encuentran "reflexiones" (*B*) que se efectúan sobre las "reflexiones" precedentes (*A*) pero con menos diferenciación que cuando las *A* y las *B* son además como en 9 "reflexionadas" y distintas en la conciencia o cuando se trata de operaciones propiamente dichas construidas sobre otras operaciones.

III / LA FUENTE DE LAS NOVEDADES LA EQUILIBRACIÓN Y LAS RELACIONES ENTRE LA COMPRENSIÓN Y LA EXTENSIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

1) En lo que precede hemos comprobado que cada acto de abstracción reflexionante implica el desplazamiento y la utilización de coordinaciones ya operantes en el nivel inicial, pero con el agregado de características nuevas que resultan de una construcción creadora a este respecto. Lo único que hicimos ha sido describir estos ultimos aspectos y queda por hallar aquí una explicación basándonos en los procesos de equilibración. Pero conviene primero recordar que entendemos por "equilibrio cognitivo" (por analogía con la estabilidad de un organismo vivo) algo totalmente distinto del equilibrio mecánico (estado de reposo por equilibrio de fuerzas antagónicas) o del equilibrio termodinámico (reposo con destrucción de las estructuras). El equilibrio cognitivo se parece más a lo que Glansdorff y Prigogine llaman "estados dinámicos", (*) es decir, estacionarios pero con cambios susceptibles de "construir y mantener un orden funcional y estructural en un sistema abierto" (**) situado lejos de la zona de equilibrio termodinámico. Dicho de otro modo, el equilibrio congnitivo no es un estado de inactividad sino de constantes cambios y, si hay equilibrio, es porque estos preservan la conservación del sistema, en tanto ciclo de acciones, o de operaciones interdependientes, aunque cada una de ellas pueda entrar en relación con el exterior. Este sistema se puede simbolizar del siguiente modo: $A \times A' = B$; $B \times B' = C; \ldots; Z \times Z' = A$. Ahora bien, como en un organismo vivo, los términos $A, B, C, \ldots, Z$ constituyen un ciclo cerrado en sus composiciones, aunque la actividad de cada uno se alimente por medio de los elementos exteriores A', $B', \ldots, Z'$ y en ese sentido el sistema sea abierto.

Las condiciones de esta equilibración son tres: 1) Una capacidad duradera de acomodación de esquemas a los objetos (exteriores o de pensamiento) que conducen a una diferenciación progresiva de esos esquemas que enriquece, aunque conservándolo, su estado anterior, sin pérdidas ni producción de esquemas radicalmente nuevos. 2) Una asimilación recíproca de los esquemas en subsistemas y de estos entre sí, que conducen a coordinaciones, de modo tal que ellos se conservan enriqueciéndose mutuamente. 3) Una integración de los subsistemas en totalidades caracterizadas por sus leyes de composición, con conservación de esos subsistemas en la medida en que sus propiedades diferenciadas pueden ser reconstruidas a partir del sistema total. Agreguemos que, desde el punto de vista formal, tales estructuras equilibradas conllevan en todos los niveles, una compensación exacta de las afirmaciones y de las negaciones.

Por supuesto que ese equilibrio nunca es alcanzado, salvo (y quizás ni eso) en las matemáticas puras. En el terreno del pensamiento natural, y tanto

(*) *Structure, stabilité et fluctuation*, 1971, P3G. 272.
(**) pág. 271.

más a medida que nos remontemos a los estadios elementales, constantemente nos hallamos en presencia de desequilibrios, cuyas tres características principales son: 1) conflictos entre el sujeto y los objetos por insuficiencia de acomodación, por decepción de las previsiones en las experiencias o por desplazamientos temporales de las acomodaciones a dominios diferentes; 2) conflictos entre subsistemas por falta momentánea de coordinación (asimilación y acomodación recíprocas) en particular en caso de desplazamiento temporal entre sus elaboraciones respectivas; 3) desequilibrio entre la diferenciación y la integración, porque esta en un comienzo resulta insuficiente. Una fuente sistemática de desequilibrio también está constituida (y se manifiesta en las tres formas precedentes) por el retraso de las negaciones respecto de las afirmaciones, de donde proviene una falla inicial y muy general de las compensaciones.

2) Así, las novedades debidas a la abstracción reflexionante hallan su razón de ser en el proceso general de equilibración recordado más arriba, que sigue siendo válido como tendencia, y sobre todo en las continuas reequilibraciones que remedian los desequilibrios y proceden por regulaciones comunes antes de alcanzar las regulaciones "perfectas" que constituyen las operaciones. De modo general se puede decir que cada novedad endógena consiste en la realización de las posibilidades abiertas por las construcciones del nivel precedente. En efecto, mientras que la acomodación de un esquema a objetos exteriores lleva aparejada su deferenciación de modo imprevisible porque es exógena, en función de propiedades de estos hasta entonces desconocidas, la asimilación recíproca de los esquemas es un proceso continuo y coherente, pero no inmediato: cada coordinación, una vez realizada, abre el camino a nuevas asimilaciones recíprocas, con las acomodaciones mutuas que diferenciarán los esquemas por coordinar; y esas diferenciaciones, así como las integraciones exigidas como compensación, constituyen, pues, posibilidades abiertas por las coordinaciones precedentes antes de poder a su vez actualizarse.

De este modo se elaboran los diversos niveles de reflejamiento. Cuando, en el nivel sensomotor, la imitación adquiere cierto grado de virtuosismo, se hace susceptible de funcionar bajo sus formas "diferidas" después interiorizadas; de ahí un comienzo de representación (gestos simbólicos y después imágenes mentales) reforzado por la adquisición del lenguaje, que se hace posible en este contexto de imitación ampliada: ahora bien, toda nueva posibilidad (comparable a un trabajo virtual no compensado o a una posible disipación de energía potencial) lleva en sí la necesidad de ejercerla; de ahí el nivel de las representaciones que se superpone al de las acciones. Igualmente en un proceso de pensamiento, del que en principio solo son conscientes el principio y el resultado, la toma de conciencia del mecanismo intermediario constituye una posibilidad abierta por las variaciones eventuales de las situaciones: de ahí la tematización de operaciones utilizadas como instrumentos y que entonces se transforman en objetos de pensamiento.

Ahora bien, una transposición de estructuras de un nivel inferior al nivel siguiente de reflejamiento es naturalmente la fuente de múltiples desequilibrios debidos a las nuevas dimensiones por considerar (simultaneidad

además de sucesiones, nuevos objetos tematizados, etc.); de ahí la necesidad de nuevas acomodaciones y asimilaciones: por tanto, debe buscarse todo el secreto de esas novedades en la equilibración de las diferenciaciones y de las integraciones. La abstracción por sí misma consiste en una diferenciación, puesto que separa una característica para transferirla y una nueva diferenciación implica la necesidad de la integración en nuevas totalidades sin las cuales la asimilación deja de funcionar; de ahí el principio común de la formación de las novedades, al conducir la abstracción reflexionante a generalizaciones por eso mismo constructivas y no simplemente inductivas o extensionales como la abstracción empírica.

3) De modo general, la fuente de las novedades es, pues, la necesidad de una equilibración entre la asimilación y la acomodación, y el hecho de que esta causa tanto diferenciaciones endógenas como exógenas. En cuanto a las transformaciones, consisten a la vez (y esto es esencial) en construcciones y en compensaciones. En los niveles elementales las compensaciones pueden consistir solo en suprimir el obstáculo, descuidándolo o deformando su representación, y esto ya es un comienzo de construcción, porque una reacción negativa es un esbozo de negación. O bien, por el contrario, la compensación consiste en modificar el esquema de asimilación y entonces es constructiva en el sentido de una diferenciación que exige después nuevas integraciones.

Si las novedades debidas de ese modo a la equilibración no son inmediatas, sino que suponen una elaboración de duración más o menos larga y una rapidez óptima, es por supuesto a causa de la diversidad de los planos de reflejamiento, pero también se debe al hecho de que todo esquema implica según su nivel una "norma de acomodación" (en el sentido de la "norma de reacciones" de un genotipo en biología, aunque los esquemas cognitivos no sean en su inmensa mayoría hereditarios): un esquema, en efecto, no es susceptible de cualquier acomodación pues, si es demasiado nueva, lo disloca impidiendo el cierre de su ciclo (no volviendo A ⟶ B ⟶ C ⟶ A a *A* si *B* o *C* están muy profundamente modificadas). Por el contrario, si las acomodaciones son muy conocidas ya no hay actividad, pues el conocimiento exige una alimentación constantemente renovada de los esquemas.

4) En el caso de asimilaciones que conservan su continuidad y de acomodaciones "normales" el antiguo esquema se amplía por la incorporación de elementos nuevos en su ciclo, y este antiguo esquema se transforma en un caso particular del segundo, es decir que conserva sus poderes anteriores aunque adquiera otros más amplios. Este hecho explica una característica fundamental de la abstracción reflexionante, cuando llega a separar las formas suficientemente disociadas de los contenidos: sucede que la "comprensión" de una estructura se vuelve proporcional a la "extensión" de los contenidos que ella permite engendrar, mientras que en el nivel de la abstracción empírica la proporción es inversa. Por ejemplo, cuando de los mamíferos se abstrae (empíricamente) el hecho de poseer vértebras y se las encuentra en los peces, etcétera, la clase de los vertebrados es más rica en extensión que la de los mamíferos, pero más pobre en comprensión (pues no se puede

deducir de la existencia de vértebras la posibilidad de tener mamas). Por el contrario, abstrayendo la resta de las situaciones *n* - *n*' o *n* > *n*' para aplicarla a las situaciones n < n' y para engendrar los números negativos (lo que ha llevado unos cuantos siglos), se obtiene una clase de números *Z* más rica en extensión que los enteros positivos *N*, pero cuya estructura total es igualmente más rica en comprensión porque los *Z* forman un grupo y un anillo y los *N* solamente un monoide.

Por lo demás, el problema de las relaciones entre la comprensión y la extensión es más complejo de lo que decimos aquí, y volveremos a detallarlo a propósito de las investigaciones acerca de la generalización. En realidad, es necesario distinguir las extensiones y las comprensiones respectivas de las formas o estructuras, por un lado, y las de los contenidos por otro, y la relación es inversa tanto en el caso de los primeros como en el de los segundos. Solamente cuando se trata de abstracciones empíricas, las formas (aunque construidas con la participación de la abstracción reflexionante) están moldeadas sobre los contenidos, y estos se dan en la experiencia y no son creados por aquellas. Por el contrario, cuando se trata de puras abstracciones reflexionantes (como en el caso de la construcción de los números) nuevos contenidos son engendrados por las formas operatorias (por ejemplo: los enteros negativos a partir de la resta), mientras que las formas se enriquecen de modo autónomo (por reflexiones sobre las reflexiones). En este caso el crecimiento simultáneo de las propiedades (comprensión) de las formas y de la extensión de los contenidos es doblemente constructivo por el hecho de que los segundos son elaborados gracias a las primeras. Si no sucede así en la abstracción empírica es porque el enriquecimiento de las formas (complejidad de los ajustes de los tipos 1 a *n*) está determinado por el aumento de los contenidos observados, pero con subordinación de las primeras a los segundos.

En síntesis, la razón de esta diferencia obedece a que la generalización ligada a las abstracciones empíricas es solo extensional y consiste en hallar en nuevos objetos una propiedad que ya existía en ellos, similar a la que se abstrae de los objetos iniciales; por el contrario, la abstracción reflexionante consiste en introducir en nuevos objetos propiedades que no poseían, ya sea que se las extraiga de las construcciones de los niveles precedentes, o, sobre todo, que su reorganización conduzca a construir nuevas formas que engendran entonces nuevos contenidos. Esto nos lleva a una comparación general de los dos tipos de abstracciones.

IV / ABSTRACCIONES EMPÍRICAS Y REFLEXIONANTES

En primer lugar recordemos que las dos existen en todos los niveles de desarrollo, desde los estratos sensomotores e incluso orgánicos hasta las formas más elevadas del pensamiento científico. En el plano biológico las influencias del medio (*) corresponden a las abstracciones empíricas y las

(*) En la "teoría sintética" actual son tan efectivas como en el lamarkismo, salvo que, con la selección, el mecanismo se ha vuelto probabilístico y conduce a modificar las proporciones en el seno del genoma, así como los diversos coeficientes condicionados por ellas (supervivencia, etc.).

"reconstrucciones convergentes con superaciones" (por ejemplo en las relaciones de homología entre órganos que pasan de una grupo zoológico inferior a un grupo superior) a las abstracciones reflexionantes. En los estratos sensomotores, la abstracción empírica extrae su información de los objetos y los caracteres materiales u observables de las acciones, mientras que la abstracción reflexionante la toma de las coordinaciones de esquemas.

1) Pero, como en los estadios iniciales existen menos diferencias entre las acciones y sus coordinaciones (o sea entre los contenidos y las formas) que en los estadios ulteriores y, en particular, como las formas no se diferencian de las primeras operaciones concretas antes del nivel IIA, es evidente que la frontera entre los dos tipos de abstracciones es mucho menos clara y menos estable durante esos períodos de formación que después. Además, en todos los niveles su distinción depende de tres factores que son relativos sin oposiciones absolutas: *a*) Las abstracciones empíricas se refieren a los elementos observables y las reflexionantes a las coordinaciones: ahora bien, en sí misma una característica no es observable o no. Incluso en física, según que las medidas se refieran a los tamaños astronómicos o a situaciones experimentales (tales como un juego de resortes), las masas, las fuerzas o las aceleraciones pueden ser objeto de comprobaciones o ser solo inferidas por coordinaciones deductivas. *b*) En segundo lugar, existen muchos grados de generalidad en las coordinaciones de las acciones, a partir de las más limitadas (tales como la que hay entre la visión y la prensión hacia los 4-5 meses) hasta las más fundamentales (orden, ajustes, correspondencias, etc.), y es evidente que la abstracción es tanto más reflexionante cuanto más cercanamente vincula estas formas generales que están en la base de las estructuras lógico matemáticas. *c*) A esto se agrega que las funciones de forma y de contenido son relativas, pues toda forma se convierte en contenido para aquellas que lo engloban: de ahí, entre otras cosas, la posibilidad y las numerosas variedades de abstracciones pseudoempíricas.

Es evidente que la evolución de los dos grandes tipos de abstracciones implicará cierta complejidad y, sobre todo, una notable ausencia de simetría: en efecto, la abstracción reflexionante se depura siempre más, en virtud de su propio mecanismo de reflexión sobre las reflexiones, mientras que la abstracción empírica solo llega a cumplir sus progresos en cuanto a afinamiento y objetividad (y estos progresos son considerables entre nuestros estadios I y III, así como en toda la historia del pensamiento científico) al apoyarse cada vez más en la colaboración necesaria de la abstracción reflexionante.

Comenzando por esta, resulta claro que sus comienzos orgánicos y sensomotores son aún muy modestos, tanto por la falta de conciencia que los caracteriza como por la poca diferenciación de la que es capaz para disociar las formas de sus contenidos. Más precisamente, el primer nivel de la abstracción reflexionante es aquel cuya función esencial es elaborar marcos asimiladores con miras a la abstracción empírica, o sea formas ajustables a sus contenidos extralógicos. A partir de los niveles propios de la representación, sus progresos se tornan constantes y, a partir de un segundo nivel, esta llega a engendrar funciones y operaciones, pero con la condición de apoyarse largo tiempo en las abstracciones pseudoempíricas tales que los resultados de los reflejamientos y de las reflexiones sigan estando materializadas en los

objetos transformados y enriquecidos por las actividades del sujeto. En cuanto a la abstracción reflexionada, permanece bastante sistemáticamente en retraso respecto del proceso reflexionante hasta el momento (tercer nivel) en que se tranforma en el instrumento necesario de las reflexiones sobre la reflexión anterior y permite finalmente la formación de una metarreflexión o pensamiento reflexivo que hace entonces posible la constitución de sistemas logicomatemáticos de caracter científico. Desde este punto de vista, una de las formas finales actualmente alcanzadas por la abstracción reflexionante no es otra que la formalización, caso límite en el cual la forma llega a liberarse del contenido, aunque con las restricciones conocidas (pero con un desplazamiento continuo de las fronteras).

La evolución de la abstracción empírica es muy diferente, porque en todos los niveles, sin excepción, su funcionamiento exige el empleo de esquemas asimiladores cuya formación depende, al menos en parte, de la abstracción reflexionante. Pero en los estadios iniciales resulta claro que proporcionalmente los actos de abstracción empírica son mucho más numerosos que las intervenciones de la abstracción reflexionante. El hecho esencial que domina el desarrollo de la más simple de estas dos formas es que, en los estadios ulteriores, la proporción se invierte cada vez más, o sea relativamente a costa suya, pero su subordinación creciente a las abstracciones reflexionantes refuerza sus poderes y conduce a progresos considerables en número absoluto así como en cualidad; dicho de otro modo: en adecuación a lo real.

2) En lo que se refiere a este aumento en número absoluto y en precisión de las abstracciones empíricas que se apoyan en las abstracciones reflexionantes, resulta ya bien visible en la sucesión de nuestros estadios. En los niveles elementales donde la parte de estas últimas es mínima y donde la abstracción empírica aparece casi pura, se limita a registrar las características perceptivas más aparentes y más globales de los objetos, mientras que con el progreso de la conceptualización, de las relaciones de orden, o estructuras logicoaritméticas en general y sobre todo de la métrica espacial y de los sistemas de referencias, cantidades crecientes de propiedades de los cuerpos y de las acciones se tornan observables después de haber sido descuidadas o sistemáticamente deformadas. Todos los capítulos de esta obra proporcionan ejemplos de este tipo. Pero este fenómeno es más sorprendente en el terreno del pensamiento científico. Si comparamos el conjunto de nuestros conocimientos experimentales actuales, tanto en las escalas microfísicas o astronómicas y cósmicas como en los escalones intermedios, con aquello con lo que los físicos del siglo XVII, y aún los del XIX, se debían contentar, el progreso en número absoluto de nuevas comprobaciones es por cierto considerable. Pero cada una de las medidas obtenidas, incluso en nuestra escala, pero, *a fortiori*, aproximándose a las fronteras de lo mensurable, supone un mundo de elaboraciones teóricas necesarias tanto para el enunciado de las preguntas formuladas a la naturaleza como para la construcción de los aparatos indispensables. Ahora bien, las trivialidades que recordamos aquí no conciernen solamente a los modelos explicativos, aunque también estos cumplen un papel no desdeñable en el descubrimiento de los nuevos elementos observables, sino también a la lectura misma de los hechos de la

experiencia, es decir, a la parte de la abstracción empírica que está en la base del establecimiento de los datos (*) y del control de las hipótesis deductivas. Parece entonces evidente que si las abstracciones empíricas se han podido multiplicar con la ciencia contemporánea, es porque fueron revestidas de un tejido tan denso de abstracciones reflexionantes que las posibilitaron, que el teórico, sumergido en sus "modelos", con frecuencia olvida esta parte de contacto obligatorio entre el sujeto y las propiedades del objeto que ya existían antes de ser enmarcadas y enriquecidas por las estructuras lógicomatemáticas de naturaleza reflexionante (estas proporcionan incluso la sustancia de las explicaciones causales; pero una vez establecida la realidad objetiva de los hechos por explicar).

En resumen, si el desarrollo de la abstracción reflexionante es el de una depuración progresiva para conquistar las formas, el de la abstracción empírica marca, por el contrario, una subordinación creciente al primero de estos dos tipos, debida a la inserción gradual de los contenidos en las formas, pues cuanto más se enriquecen estas mejor sirven para la aprehensión de aquellos, o sea a la captación de elementos observables hasta aquí no asimilables ni siquiera en calidad de simples comprobaciones.

3) Esta asimetría entre los dos tipos de abstracciones, de los cuales uno termina por funcionar en estado casi puro, mientras que el otro solo progresa combinado con las aplicaciones del primero, se debe a las relaciones generales entre la asimilación y la acomodación. La abstracción reflexionante se refiere, en efecto, a las coordinaciones, o sea a la asimilación recíproca de los esquemas de acciones o de operaciones, lo que implica una primacía de la asimilación. Es verdad que esta asimilación recíproca de los esquemas implica una parte no desdeñable de acomodación mutua. Pero entonces esta solo consiste en diferenciar uno de los dos esquemas, o los dos, hasta permitir la integración, en el ciclo de uno, de ciertos elementos del otro o hasta integrar los dos en un nuevo ciclo total (caso particular del equilibrio entre la diferenciación y la integración que es sin duda la característica más general y la más importante de la abstracción reflexionante). En tales casos la acomodación sigue siendo endógena y no exógena como cuando es impuesta por los hechos externos. En cuanto a la abstracción empírica, por el contrario, se refiere a los elementos observables y descansa por tanto en la acomodación de los esquemas a los objetos (ya sean exteriores o consistan en una parte del propio cuerpo que interviene en el aspecto material de las acciones). Ahora bien, la acomodación, incluso en ese caso, es siempre la de un esquema de asimilación, y está subordinada a él por su misma naturaleza, sin poder funcionar jamás en estado puro. En cambio, lo recíproco es verdadero solo en parte. Por cierto, la asimilación de un objeto físico a un esquema supone una acomodación de este último, y ella puede modificarlo más o menos profundamente (dentro de ciertos límites). Pero la asimilación propia de los esquemas lógicomatemáticos (así como de sus coordinaciones, y esto desde las formas más generales) presenta una especie de acomodación permanente

(*) Recordemos que, desde el punto de partida y ya en los sujetos más jóvenes, un hecho físico solo se registra a través de un marco lógicomatemático, por elemental que sea.

a los objetos, en el sentido de que si uno de ellos no puede aplicarse a tal o cual situación, jamás se contradicen con los hechos empíricos: el niño admitirá rápidamente que si fracasa al contar las gotas de agua a causa de sus fusiones o separaciones eventuales, esta resistencia a la aplicación no podría suponer una deficiencia en las propiedades aditivas de los enteros naturales. Respecto de la abstracción pseudoempírica, cuando el sujeto descubre en los objetos propiedades introducidas en ellos por su actividad, pueden producirse dificultades de lectura que necesitan una acomodación, pero esta, por la situación misma, se subordina de antemano a la asimilación. De modo general, es pues esa falta de reciprocidad entre la acomodación a los objetos y la asimilación lógicomatemática, lo que da cuenta de la asimetría sistemática de las abstracciones empírica y reflexionante.

Pero hay más. Por esa independencia y sobre todo por el hecho de que la abstracción reflexionante separa las razones intrínsecas de las coordinaciones que reconstruye y amplía en sus reflexionamientos, conduce al notable resultado de que un nuevo producto de la reflexión no podría contradecir a los precedentes. En matemáticas, un teorema recién demostrado no podría implicar la incorrección de los teoremas anteriormente justificados, pues el error solo puede referirse a su grado de generalidad. El ejemplo, constantemente citado a este respecto es el de la geometría euclidiana, cuyo error consistía en solo creer que era la única posible, pero que no perdió nada de su verdad propia, cuando fue reducida al rango de caso particular de la métrica general. Puede suceder, por supuesto, que el descubrimiento de paradojas (como en la teoría de conjuntos) obligue a refinamientos en las demostraciones, o incluso que estos se deban a que ciertos autores ponen en duda razonamientos que otros consideran evidentes (cf. los razonamientos por el absurdo y la constructibilidad estricta en Brouwer). Además, los límites supletorios de la formalización muestran que esta consiste en un proceso y no constituye un estado estable. Pero esas diversas restricciones no impiden caracterizar los progresos del pensamiento reflexivo por una coherencia creciente y continua, sin crisis que obliguen a sacrificar una parte de lo que parecía adquirido; incluso en los estadios elementales, los conflictos entre subsistemas se deben a una falta de sincronización en su elaboración; y, una vez halladas las razones de las composiciones operatorias estas continúan sin contradicciones.

Muy diferente es la situación de la abstracción empírica, pues un hecho nuevo, separado gracias a ella, puede contradecir un modelo explicativo hasta su eliminación completa (cf. el éter y el viento de éter, a continuación de la experiencia de Michelson y Morley), o incluso contradecir un sistema de leyes, como la medida del perihelio de Mercurio. Se responderá quizá que en este último caso las leyes de la mecánica newtoniana siguen siendo verdaderas en una primera aproximación, en cierta escala, como continúa siéndolo la geometría euclidiana cuando se eliminan las curvaturas. Pero estas dos situaciones son, en realidad, muy diferentes, pues la mecánica newtoniana debe su verdad parcial solo al descuido de factores cuya influencia subsiste pero es mínima en el caso de velocidades muy alejadas de la de la luz, mientras que la geometría euclidiana conserva toda su verdad en el caso en que las paralelas y los ángulos de un triángulo presentan ciertas propiedades invariantes, sin descuidar de ningún modo los factores secundarios.

En síntesis, existe una diferencia, no solo psicológica sino también formal entre los dos tipos de abstracciones, pues una puede conducir a contradicciones y la otra descarta su posibilidad. A esto se agrega que la primera permanece siempre integrada en un marco espaciotemporal, mientras que la segunda, gracias al juego de las reversibilidades crecientes, conduce a la construcción de estructuras intemporales.

SEGUNDA PARTE

LA ABSTRACCIÓN DEL ORDEN

TERCERA PARTE

LA ABSTRACCIÓN DE LAS RELACIONES ESPACIALES